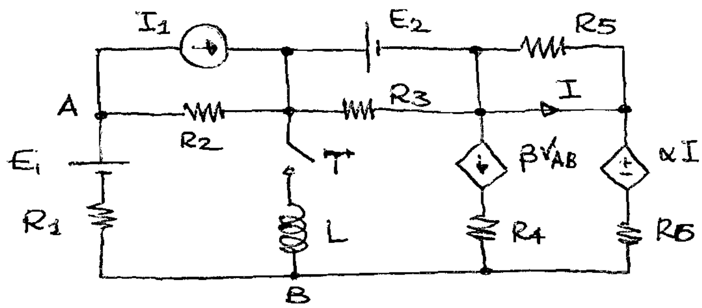
COMPITO DI ELETTROTECNICA 11/01/2012
SECONDA PROVA IN ITINERE A.A. 2011/12

Allievo .... Matricola ....
Corso di Laurea ....

Esercizio 1 (compito)

All'istante $t = 0$ sec l'interruttore T si chiude permettendo il passaggio di corrente attraverso l'induttore L inizialmente scarico. Determinare l'energia immagazzinata nello stesso induttore dopo 2 msec.

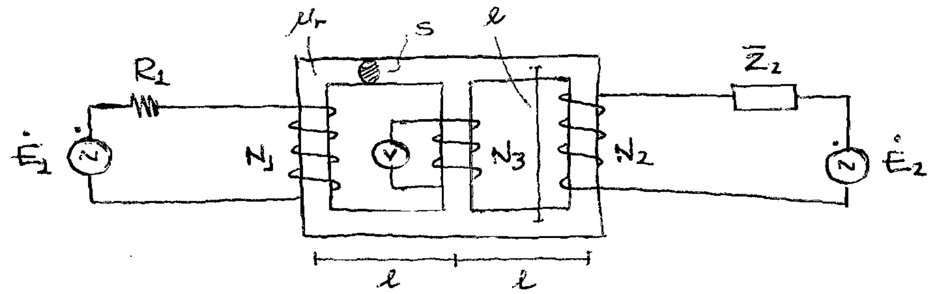
$E_1 = 4\text{V}$, $E_2 = 6\text{V}$, $I_1 = 2\text{A}$, $R_1 = R_2 = R_6 = 2\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$, $R_4 = R_5 = 5\ \Omega$, $L = 1\ \text{mH}$, $\alpha = 2\ \Omega$, $\beta = 1\ \Omega^{-1}$



Esercizio 2 (compito e seconda prova in itinere)

Il sistema in figura si trova a regime. Determinare la potenza attiva sul carico $\overline{Z}_2$ ed il numero di spire N_3 affinché il voltmetro ideale legga 1 V.

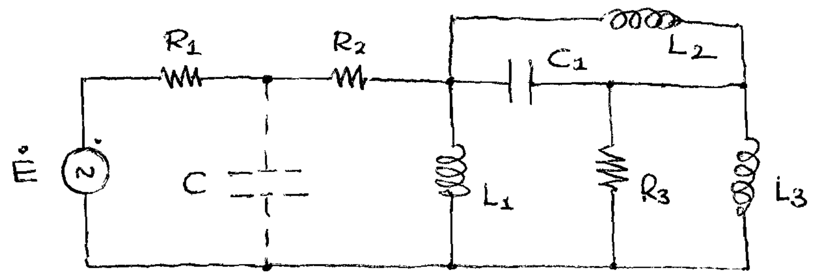
$\dot{E}_1 = 2\text{V}$, $\dot{E}_2 = 4\text{V}$, $\omega = 22{,}36\ \text{rad/sec}$, $R_1 = 1\ \Omega$, $\overline{Z}_2 = 2 + \text{j}3\ \Omega$, $N_1 = 100$, $N_2 = 200$, $S = 1\ \text{cm}^2$, $\mu_r = 1000$, $l = 10$ cm



Esercizio 3 (seconda prova in itinere)

Il sistema in figura si trova a regime. Determinare la capacità C, da inserire come indicato in figura, per rifasare a $\cos\phi = 0{,}9$.

$\dot{E} = 2 + \text{j}2\text{V}$, $\omega = 22{,}36\ \text{rad/sec}$, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$, $L_1 = 1\ \text{mH}$, $L_2 = 2\ \text{mH}$, $L_3 = 3\ \text{mH}$, $C_1 = 1\ \text{F}$



L'energia immagazzinata nell'induttore L dopo 2msec dalla chiusura del tasto T è data da

$$W_L = \frac{1}{2} L\, I_L^2(2m_s)$$

dobbiamo quindi calcolare la corrente $I_L(2msec)$ che scorre sull'induttore per $t = 2msec$.

In generale, l'andamento nel tempo della corrente su L avrà l'espressione: $i_L(t) = I_L(\infty)\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

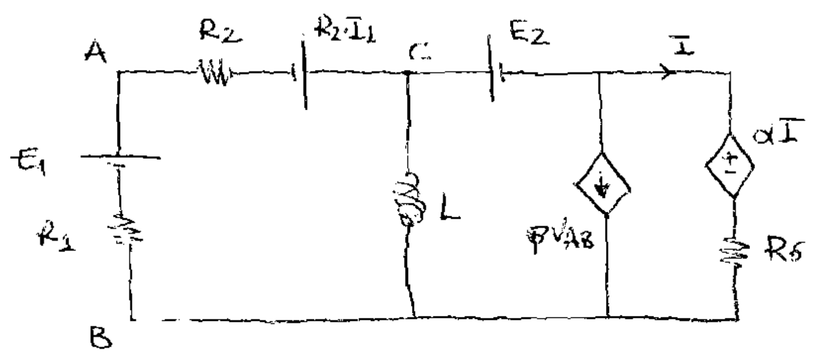
dove si è considerato $I_L(t=0) = \emptyset$ (induttore inizialmente scarico)

- $I_L(\infty)$ è la corrente che scorre a regime continuo su L
- $\tau = L/R_{eq}$ è la costante di tempo legata a L con R_{eq} resistenza vista da L

Dobbiamo calcolare $I_L(\infty)$ e τ.

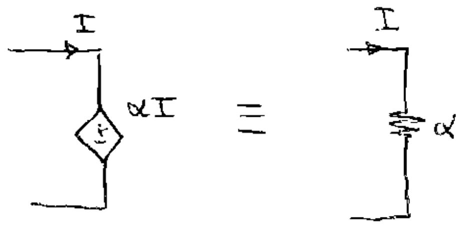
Prima semplifichiamo il circuito:

- trasformiamo il generatore reale di corrente I_1-R_2 in generatore reale di tensione;
- trascuriamo R_3 poiché in parallelo al gen. di tensione E_2 ideale prevalente;
- trascuriamo R_5 perché in parallelo ad un corto circuito;
- trascuriamo R_4 perché in serie ad un generatore di corrente ideale prevalente;

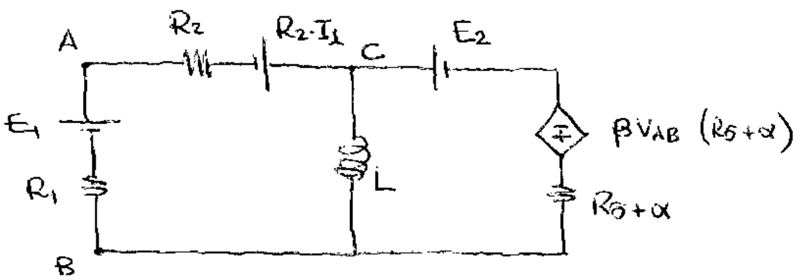


(fig. 1)

Il generatore di tensione αI è pilotato quindi dalla corrente che lo attraversa per cui equivale ad una resistenza α

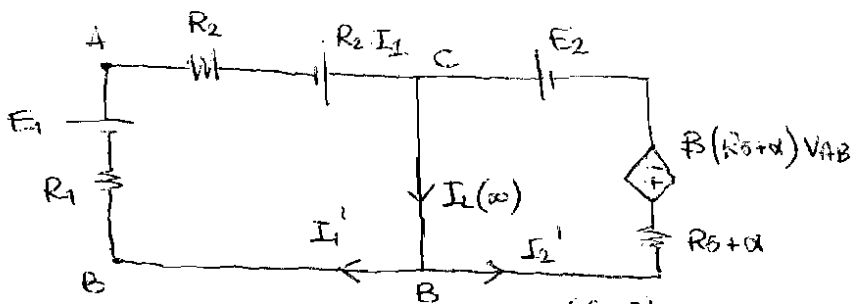


Possiamo quindi sostituire al generatore reale di corrente βV_{AB}, con in parallelo la resistenza interna $R_5+\alpha$, un generatore equivalente reale di tensione:



(fig. 2)

- CALCOLIAMO $I_L(\infty)$ cioè la corrente su L a regime continuo, quando L si comporta da c.c.



(fig. 3)

(legge al nodo B)

$$I_L(\infty) = I_1' + I_2'$$

I_1' e I_2' possono essere così determinate:

$$I_1' = \frac{E_1 + R_2 I_1}{R_1 + R_2}$$

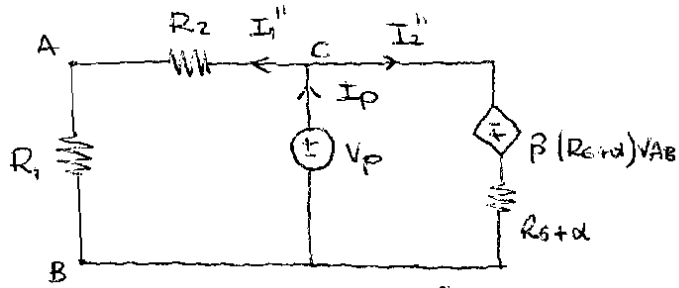
(dalla l. di Ohm gen. sul ramo a sinistra con $V_{CB}=0$)

$$I_2' = \frac{E_2 - \beta(R_5+\alpha)V_{AB}}{R_5+\alpha} = \frac{E_2 - \beta(R_5+\alpha)(E_1 - R_1 I_1')}{R_5+\alpha}$$

(dalla l. di Ohm gen. sul ramo a destra e calcolando V_{AB} ancora con la legge di Ohm gen.)

- Ottenuto il valore di $I_L(\infty)$, CALCOLIAMO R_{eq} per determinare τ.

Torniamo al circuito semplificato in fig. 2; rendiamo passivi i generatori indipendenti e sostituiamo a L un gen. di prova.



$$R_{eq} = \frac{V_P}{I_P}$$

(fig. 4)

Ancora una volta utilizziamo la legge al nodo $I_P = I_1'' + I_2''$

e la legge di Ohm generalizzata ai tre rami, da cui subito $V_{CB} = V_P$

$$I_1'' = \frac{V_P}{R_1 + R_2}$$

$$I_2'' = \frac{V_P + \beta(R_5+\alpha)V_{AB}}{R_5+\alpha} = \frac{V_P + \beta(R_5+\alpha)\cdot\frac{R_1}{R_1+R_2}\cdot V_P}{R_5+\alpha}$$

Nell' ultima si è anche considerato il partitore di tensione $V_{AB} = \frac{R_1}{R_1+R_2} V_P$.

$$I_P = V_P \left(\frac{1}{R_1+R_2} + \frac{1 + \beta(R_5+\alpha)\frac{R_1}{R_1+R_2}}{R_5+\alpha} \right)$$

per cui $$R_{eq} = \frac{V_P}{I_P} = \frac{1}{\frac{1}{R_1+R_2} + \frac{1+\beta(R_5+\alpha)\frac{R_1}{R_1+R_2}}{R_5+\alpha}}$$

Determinata $\tau = \frac{L}{R_{eq}}$,

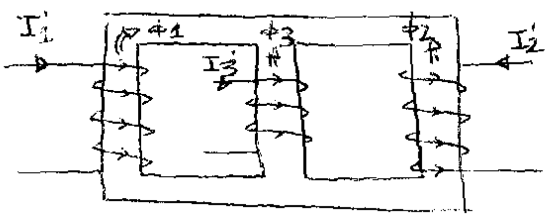
ricaviamo $I_L(2msec) = I_L(\infty)\cdot\left(1 - e^{-\frac{2msec}{\tau}}\right)$ e quindi

l'energia $W_L = \frac{1}{2} L\, I_L^2(2msec)$ come richiesto.

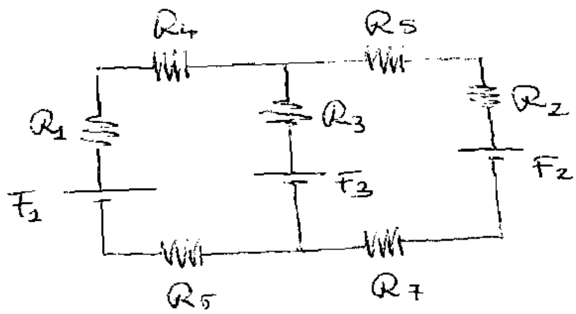
Es. 2

Risolviamo innanzitutto il nucleo ferromagnetico

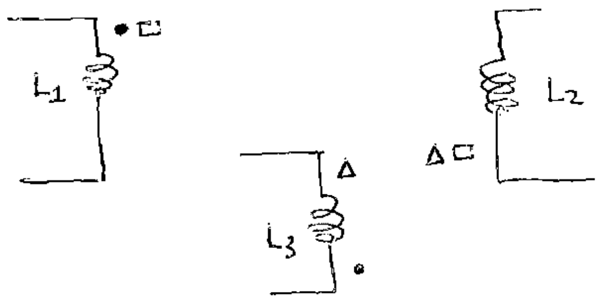
SCHEMA PER DETERMINARE
I VERSI DELLE FORZE DI MUTUA



SCHEMA PER DETERMINARE
LE RILUTTANZE EQUIVALENTI



EQUIVALENTE ELETTRICO
DEL NUCLEO



- CALCOLO DELLE RILUTTANZE

Vista la geometria, risulta $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = R = \dfrac{l}{\mu_0 \mu_r S}$

- CALCOLO DELLE RILUTTANZE EQUIVALENTI VISTE DALLE BOBINE

$$R_{eq1} = R_{eq2} = \left[R \parallel 3R\right] + 3R$$

R_{eq3} non serve perché non passa corrente sulla bobina 3 visto che il voltmetro ideale ha impedenza infinita.

- CALCOLO DEI COEFFICIENTI DI AUTO-INDUZIONE

$$L_1 = \frac{N_1^2}{R_{eq1}} \qquad\qquad L_2 = \frac{N_2^2}{R_{eq2}}$$

L_3 non ci interessa per lo stesso motivo di R_{eq3}.

- CALCOLO DEI COEFFICIENTI DI MUTUA INDUZIONE

La bobina 3 non è percorsa da corrente quindi non genera flusso e mutua sulle bobine 1 e 2. Al contrario la subisce, per cui dobbiamo calcolare i coefficienti M_{12}, M_{21}, M_{13}, M_{23}

$$M_{12} = \frac{N_1 N_2}{R_{eq1}} \cdot \alpha_{12} = \frac{N_1 N_2}{R_{eq1}} \cdot \frac{R_3}{R_3+R_5+R_2+R_7} = \frac{N_1 N_2}{R_{eq1}} \cdot \frac{1}{4}$$

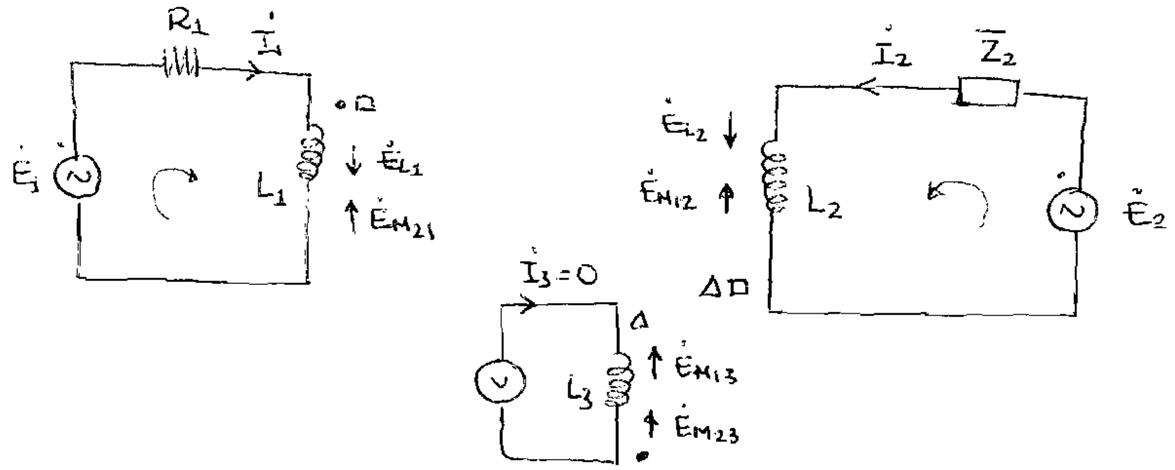
$$M_{21} = M_{12}$$

$$M_{13} = \frac{N_1 N_3}{R_{eq1}} \cdot \alpha_{13} = \frac{N_1 N_3}{R_{eq1}} \cdot \frac{R_5+R_2+R_7}{R_3+R_5+R_2+R_7} = \frac{N_1 N_3}{R_{eq1}} \cdot \frac{3}{4}$$

$$M_{23} = \frac{N_2 N_3}{R_{eq2}} \alpha_{23} = \frac{N_2 N_3}{R_{eq2}} \cdot \frac{R_1+R_4+R_6}{R_3+R_1+R_4+R_6} = \frac{N_2 N_3}{R_{eq2}} \cdot \frac{3}{4}$$

M_{13} e M_{23} dipendono da N_3 che deve essere calcolato.

CIRCUITO EQUIVALENTE A QUELLO ASSEGNATO



Determiniamo le correnti $\dot{I}_1$ e $\dot{I}_2$ tramite equazioni alle maglie

$$\begin{cases} \dot{E}_1 + \dot{E}_{L1} - \dot{E}_{M21} = R_1 \dot{I}_1 \\ \dot{E}_2 + \dot{E}_{L2} - \dot{E}_{M12} = \overline{Z}_2 \dot{I}_2 \end{cases}$$

; sostituendo $\dot{E}_{Lx} = -j\omega L_x \dot{I}_x$

$\dot{E}_{Mxy} = -j\omega M_{xy} \dot{I}_x$

si ha:

$$\begin{cases} \dot{E}_1 - j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M_{21} \dot{I}_2 = R_1 \dot{I}_1 \\ \dot{E}_2 - j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M_{12} \dot{I}_1 = \overline{Z}_2 \dot{I}_2 \end{cases}$$

Il sistema delle due equazioni ci permette di determinare $\dot{I}_1$ e $\dot{I}_2$

La potenza attiva sul carico $\overline{Z}_2$ sarà:

$$P_2 = \mathrm{Re}\{\overline{Z}_2\} \cdot |\dot{I}_2|^2$$

dove $\mathrm{Re}\{\overline{Z}_2\}$ è la parte reale di $\overline{Z}_2$ cioè la sua resistenza, 2Ω

$|\dot{I}_2|$ è il modulo del fasore $\dot{I}_2$ cioè il valore efficace I_2

La tensione $\dot{V}$ ai capi del voltmetro è:

$$\dot{V} = \dot{E}_{M13} + \dot{E}_{M23} = -j\omega M_{13}\dot{I}_1 - j\omega M_{23}\dot{I}_2 =$$

$$= -j\omega\left(\frac{N_1 N_3}{R_{eq1}}\,\frac{3}{4}\,\dot{I}_1 + \frac{N_2 N_3}{R_{eq2}}\cdot\frac{3}{4}\,\dot{I}_2\right) =$$

$$= -j\,\frac{3}{4}\,\underbrace{\frac{\omega N_3}{R_{eq}}}_{(R_{eq1} = R_{eq2})}\left(N_1\dot{I}_1 + N_2\dot{I}_2\right)$$

Poiché il voltmetro legge il valore efficace della grandezza sinusoidale, quindi il modulo del fasore $\dot{V}$, e questo valore deve essere pari ad 1 Volt, possiamo determinare il valore necessario per N_3 da:

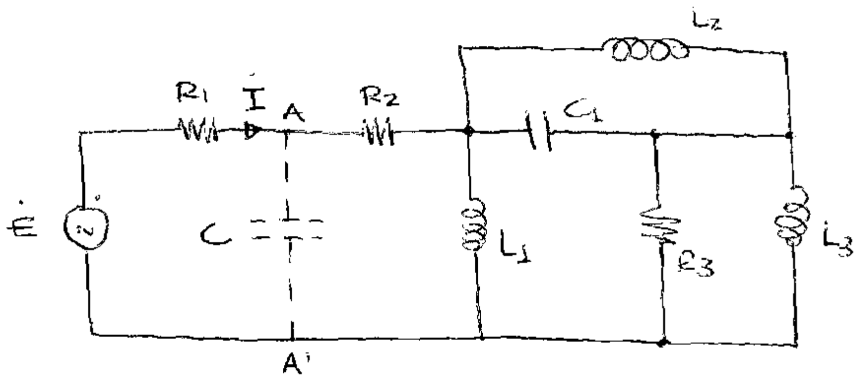
$$\frac{3}{4}\,\frac{\omega N_3}{R_{eq}}\left|N_1\dot{I}_1 + N_2\dot{I}_2\right| = 1$$

$$\Longrightarrow \quad N_3 = \frac{4 R_{eq}}{3\omega\left|N_1\dot{I}_1 + N_2\dot{I}_2\right|}$$

Es. 3

Per determinare la capacità di rifasamento, dobbiamo determinare la potenza complessa che transita nella sezione tra cui inserire C.

$\bar{S} = \dot{V}_{AA'} \cdot \overset{\smile}{I}$



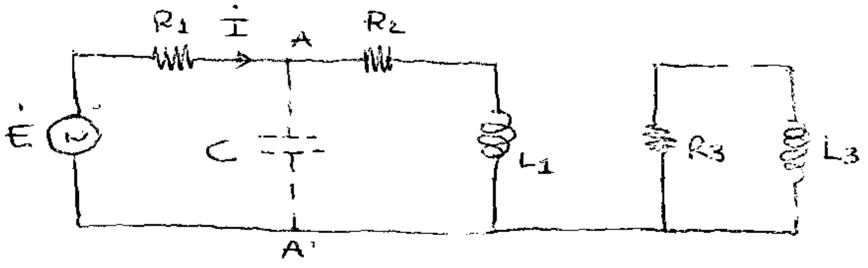
Nel risolvere la composizione di bipoli passivi a destra del circuito, C_1 ed L_2 risultano in parallelo

$$\bar{\bar{Z}}_p = j\omega L_2 // \frac{1}{j\omega C_1} = \frac{j\omega L_2 \cdot \frac{1}{j\omega C_1}}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{L_2}{C_1} \cdot \frac{j\omega C_1}{-\omega^2 L_2 C_1 + 1} = \frac{j\omega L_2}{1-\omega^2 L_2 C_1}$$

Sostituendo i valori dati risulta $1-\omega^2 L_2 C_1 = 0$ $\left(\omega = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_1}}\right)$

che è la condizione di risonanza parallelo per cui

$\bar{Z}_p \to \infty$ cioè si comporta da circuito aperto.



Nella maglia a destra non scorre corrente mentre calcoliamo molto facilmente:

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{R_1 + R_2 + j\omega L_1} \; ; \qquad \dot{V}_{AA'} = \dot{E} - R_1 \dot{I}_1 \; ,$$

$$\bar{S} = \dot{V}_{AA'} \cdot \breve{I} = P_{CA} + j\, Q_{CA}$$

Essendo $\phi = \arccos 0{,}9$ l'angolo di sfasamento richiesto,

si otterrà:

$$C = \frac{Q_{CA} - P_{CA} \cdot tg\phi}{\omega \, |V_{AA'}|^2}$$