COMPITO DI ELETTROTECNICA 13/12/2012

PROVA IN ITINERE A.A. 2012-2013

Allievo..Matricola........................

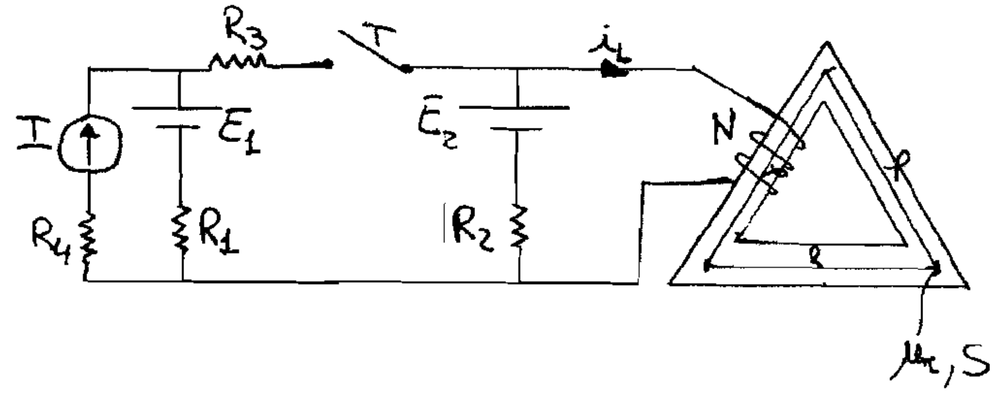
Corso di Laurea ....

Esercizio 1

All'istante t=0, il tasto T si chiude. Determinare l'andamento temporale di $i_L(t)$.

E_1 = 10 V; E_2 = 2 V; I = 3 A; R_1 = 5 Ω; R_2 = 2 Ω; R_3 = 7 Ω; R_4 = 4 Ω;

l = 3 cm; S = 0.625 cm^2, μ_r = 500, N (numero di spire della bobina) = 200.

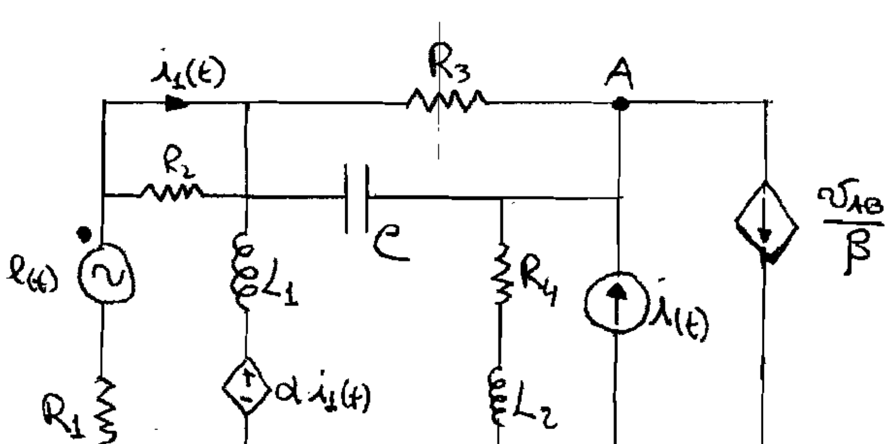


Esercizio 2

Il sistema in figura si trova a regime. Determinare l'andamento temporale di i1(t).

e(t) = 6$\sqrt{2}$ sen(2πft) V; i(t) = $\sqrt{2}$ sen(2πft+π/4) A; f = 50 Hz; α=β=2 Ω;

R_1=2 Ω; R_2=5 Ω; R_3=6 Ω; R_4=4 Ω; L_1=1 mH; L_2=4 mH; C=1μF.



Esercizio 1

Trasformiamo il nucleo magnetico nel circuito elettrico equivalente:

$$\mathcal{R}_1' = \mathcal{R}_2' = \mathcal{R}_3' = \frac{l}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot S} = \frac{3 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 0{,}625 \cdot 10^{-4}} = 7{,}64 \cdot 10^5\ H^{-1}$$

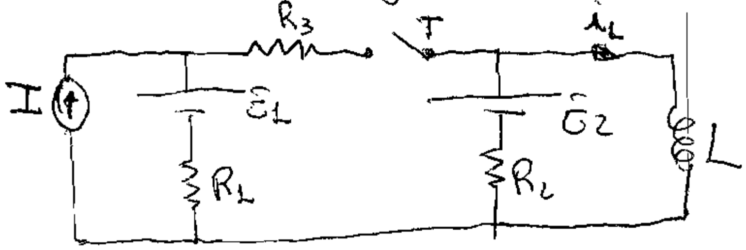
La riluttanza equivalente $\mathcal{R}_{eq}$, vista dall'avvolgimento N_1 è:

$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_1' + \mathcal{R}_2' + \mathcal{R}_3' = 3 \cdot 7{,}64 \cdot 10^5 = 2{,}29 \cdot 10^6\ H^{-1}$$

L'induttanza equivalente è pari a:

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}_{eq}} = \frac{200^2}{2{,}29 \cdot 10^6} = 17{,}5\ mH$$

Il bipolo resistivo R_1 è trascurabile ai fini della corrente poiché in serie ad un generatore di corrente

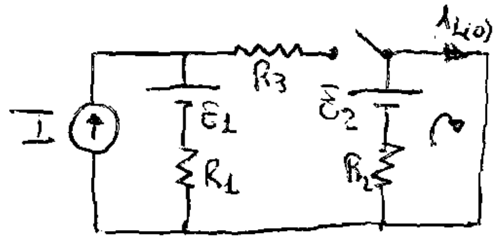


L'andamento temporale della i_L, in generale, si può scrivere come:

$$i_{L(t)} = i_{L(0)} e^{-\frac{t}{\tau}} + i_{L(\infty)} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Con $i_{L(0)}$ indichiamo la corrente che all'istante $t=0$ scorre nella maglia E_2-L-R_2-E_2

Il bipolo induttivo L, nei due funzionamenti a regime (prima e dopo la chiusura del tasto T), si comporta da corto circuito

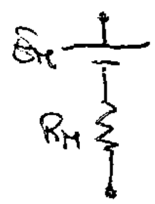


Perciò, scegliendo il verso di percorrenza della maglia in senso orario, possiamo scrivere:

$$i_{L(0)} = \frac{\mathcal{E}_2}{R_2} = 1\,A$$

Per poter calcolare la $i_{L(\infty)}$, valutiamo il circuito equivalente alla chiusura del tasto T.

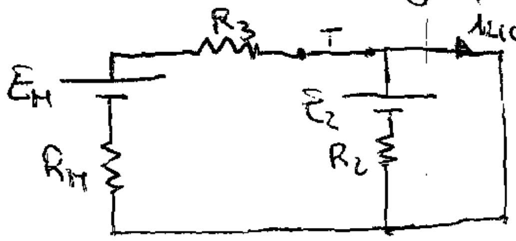
Applico Millman tra i rami I e $\mathcal{E}_1$-R_1:



$$\mathcal{E}_M = \frac{\mathcal{E}_1/R_1 + I}{\frac{1}{R_1}} = \frac{10/5 + 3}{\frac{1}{5}} = 25\,V$$

$$R_M = \frac{1}{\frac{1}{R_1}} = 5\,\Omega$$

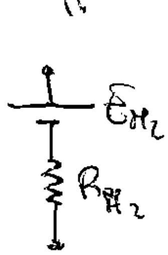
Otteniamo il seguente circuito equivalente:



R_3 e R_M sono in serie, quindi:

$$R_{eq} = R_3 + R_M = 12\,\Omega$$

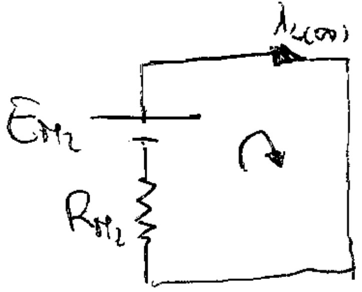
Applico Millman tra i rami $\mathcal{E}_M$-R_{eq} e $\mathcal{E}_2$-R_2:



$$\mathcal{E}_{M_2} = \frac{\mathcal{E}_M/R_{eq} + \mathcal{E}_2/R_2}{\frac{1}{R_{eq}} + \frac{1}{R_2}} = \frac{25/12 + 2/2}{\frac{1}{12} + \frac{1}{2}} = 5{,}29\,V$$

$$R_{M_2} = \frac{1}{\frac{1}{R_{eq}} + \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{1}{12} + \frac{1}{2}} = 1{,}71\,\Omega$$

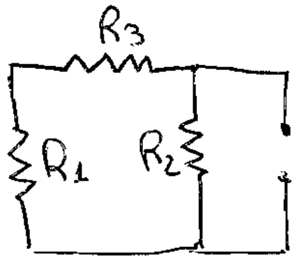
Ricaviamo così:



Scegliendo un verso di percorrenza, della maglia, orario, otteniamo:

$$i_{L(\infty)} = \frac{E_{M_2}}{R_{M_2}} = \frac{5,29}{1,71} = 3,09\ A$$

Per determinare la costante di tempo $\tau = \frac{L}{R}$, dobbiamo calcolare la resistenza equivalente R vista dal bipolo induttivo. Considerando il seguente circuito, possiamo ricavare R.



$$R'' = R_1 + R_3 = 5 + 7 = 12\ \Omega$$

$$R = \frac{R'' \cdot R_2}{R'' + R_2} = \frac{12 \cdot 2}{12 + 2} = 1,71\ \Omega$$

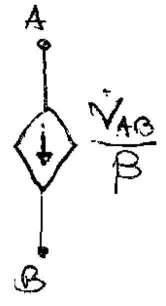
$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{17,5 \cdot 10^{-3}}{1,71} = 10,23 \cdot 10^{-3}\ s$$

Quindi, l'andamento temporale della corrente $i_{L(t)}$ è:

$$i_{L(t)} = e^{-\frac{t}{10,23 \cdot 10^{-3}}} + 3,09\left(1 - e^{-\frac{t}{10,23 \cdot 10^{-3}}}\right)$$

Esercizio 2

Facciamo una chiarificazione riguardo il generatore di corrente controllato



La corrente generica $\dot{I}$ che eroga il generatore è:

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}_{AB}}{\beta}$$

Consideriamo adesso questo ramo:

La corrente che attraversa il bipolo resistivo β è:

$$\dot{I}' = \frac{\dot{V}_{AB}}{\beta}$$

Dimostrando che $\dot{I} = \dot{I}'$, possiamo affermare che i due rami sono equivalenti, quindi è possibile sostituire il generatore controllato con una resistenza.

Il bipolo resistivo R_2 è in parallelo con un cortocircuito, quindi si può trascurare.

R_3 e C sono in parallelo, perciò:

$$\bar{Z}_3 = \frac{R_3 \cdot X_C}{R_3 + X_C} = \frac{6 \cdot \left(-\frac{j}{\omega C}\right)}{6 - \frac{j}{\omega C}} = \frac{-\frac{j6}{2\pi \cdot 50 \cdot 10^{-6}}}{6 - \frac{j}{2\pi \cdot 50 \cdot 10^{-6}}} = (6 - j0{,}01)\,\Omega$$

$$\bar{Z}_4 = R_4 + j2\pi f L_2 = 4 + j2\pi \cdot 50 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = (4 + j1{,}26)\,\Omega$$

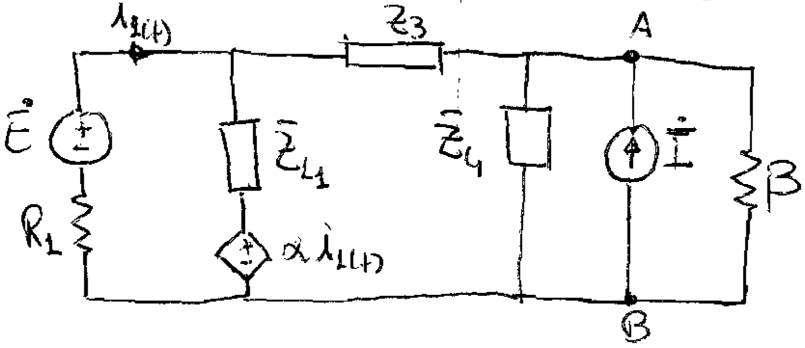
$$\bar{Z}_{L_1} = j2\pi f L_1 = j2\pi \cdot 50 \cdot 10^{-3} = j0{,}31\,\Omega$$

Trasformiamo la $i_{(t)}$ e la $e_{(t)}$ nei rispettivi vettori rotanti $\dot{I}$ e $\dot{E}$

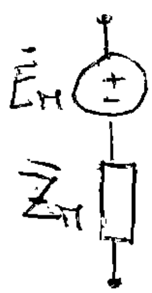
$$\dot{I} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{j\pi/4} = \left(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}\right) = (0{,}71 + j0{,}71)\,A$$

$$\dot{E} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 6\,V$$

Il circuito che otteniamo è il seguente:

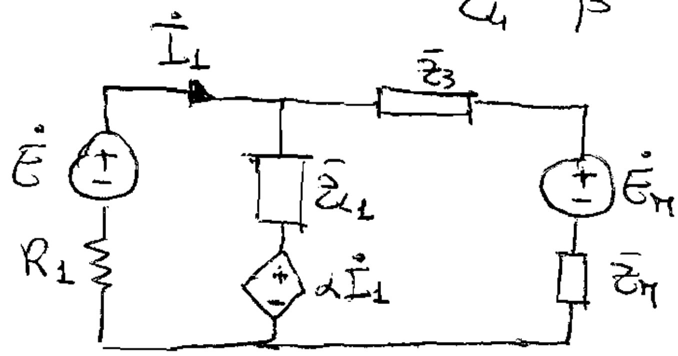


Applico Millman tra i rami $\bar{Z}_4$, $\dot{I}$ e β:



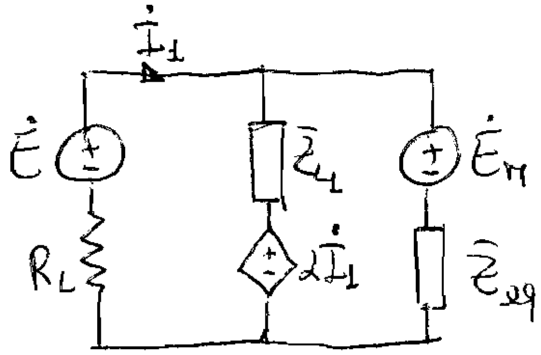
$$\dot{E}_M = \frac{\dot{I}}{\frac{1}{\bar{Z}_4} + \frac{1}{\beta}} = \frac{0{,}71 + j0{,}71}{\frac{1}{4+j1{,}26} + \frac{1}{2}} = (0{,}87 + j1{,}06)\,V$$

$$\bar{Z}_M = \frac{1}{\frac{1}{\bar{Z}_4} + \frac{1}{\beta}} = \frac{1}{\frac{1}{4+j1{,}26} + \frac{1}{2}} = (1{,}36 + j0{,}13)\,\Omega$$



$\bar{Z}_3$ e $\bar{Z}_M$ sono in serie:

$$\bar{Z}_{eq} = \bar{Z}_3 + \bar{Z}_M = (7{,}36 + j0{,}12)\,\Omega$$

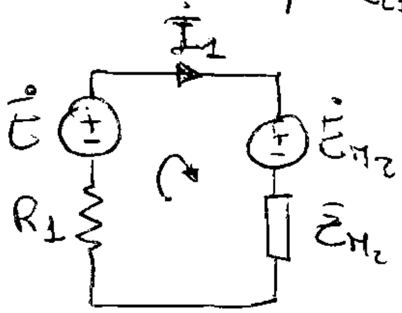


Applico Millman fra i rami $\bar{Z}_{L1}$-$\alpha\dot{I}_1$ e $\dot{E}_M$-$\bar{Z}_M$:

$$\dot{E}_{M_2} = \frac{\dot{E}_M/\bar{Z}_{eq} + \alpha\dot{I}_1/\bar{Z}_{L1}}{\frac{1}{\bar{Z}_{eq}} + \frac{1}{\bar{Z}_{L1}}} = \frac{(0{,}87+j1{,}06)/(7{,}36+j0{,}12) + \frac{2\dot{I}_1}{j0{,}31}}{\frac{1}{7{,}36+j0{,}12} + \frac{1}{j0{,}31}} =$$

$$= [-0{,}04 + j0{,}04 + (2-j0{,}08)\dot{I}_1]\ V$$

$$\bar{Z}_{M_2} = \frac{1}{\frac{1}{\bar{Z}_{eq}} + \frac{1}{\bar{Z}_{L1}}} = \frac{1}{\frac{1}{7{,}36+j0{,}12} + \frac{1}{j0{,}31}} = (0{,}01 + j0{,}31)\ \Omega$$



Scriviamo l'equazione alla maglia, scegliendo un verso di percorrenza orario:

$$\dot{E} - \dot{E}_{M_2} = (R_1 + \bar{Z}_{M_2})\dot{I}_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 + 0{,}04 - j0{,}04 - (2-j0{,}08)\dot{I}_1 = (2{,}01 + j0{,}31)\dot{I}_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{I}_1 = \frac{6{,}04 - j0{,}04}{4{,}01 + j0{,}23} = (1{,}5 - j0{,}1)$$

$$|\dot{I}_1| = \sqrt{1{,}5^2 + 0{,}1^2} = 1{,}5\ A$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{-0{,}1}{1{,}5} = -0{,}07\ rad$$

$$i_{(t)} = \sqrt{2}\cdot 1{,}5 \sin(2\pi f t - 0{,}07)\ A$$