COMPITO DI ELETTROTECNICA 08/02/2012

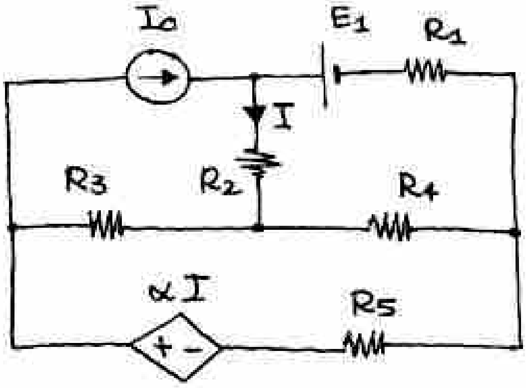
Allievo .... Matricola ....

Corso di Laurea ....

Esercizio 1

Il circuito in figura è a regime. Determinare il valore della corrente I.

$I_0 = 0.5$ A, $E_1 = 4$ V, $\alpha = 2\ \Omega$, $R_1 = R_2 = R_5 = 2\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$, $R_4 = 4\ \Omega$.



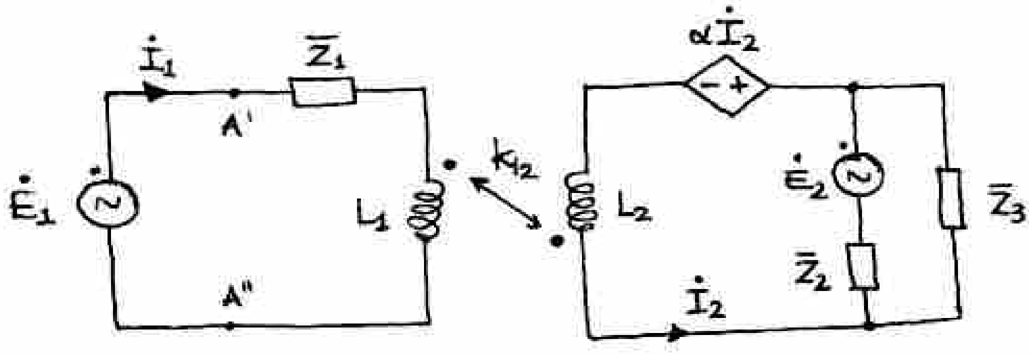
Esercizio 2

Il sistema in figura si trova a regime.

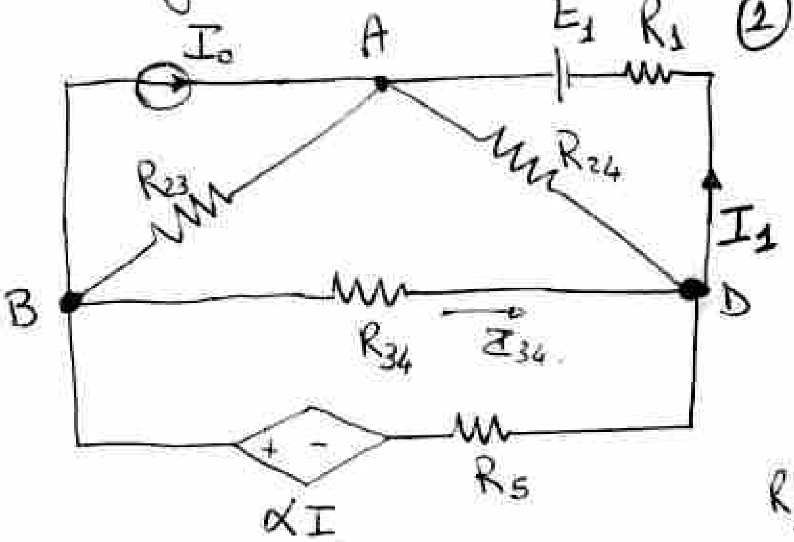
- Rappresentare l'andamento temporale della tensione tra A' e A" e della corrente che scorre sull'impedenza $\bar{Z}_1$. Valutare, dal grafico, se il carico visto dal generatore 1 è prevalentemente capacitivo o induttivo.
- Calcolare le potenze attiva, reattiva e apparente sul carico $\bar{Z}_3$.

$\dot{E}_1 = 1$ V, $\dot{E}_2 = 2 + j2$ V, $f = 50$ Hz, $\bar{Z}_1 = 1\ \Omega$, $\bar{Z}_2 = 1 + j4\ \Omega$, $\bar{Z}_3 = 2 + j4\ \Omega$,

$L_1 = 1$ mH, $L_2 = 2$ mH, $k_{12} = 0.4$, $\alpha = 2\ \Omega$.



Trasformiamo la stella di resistenze $R_2 - R_3 - R_4$ in triangolo:

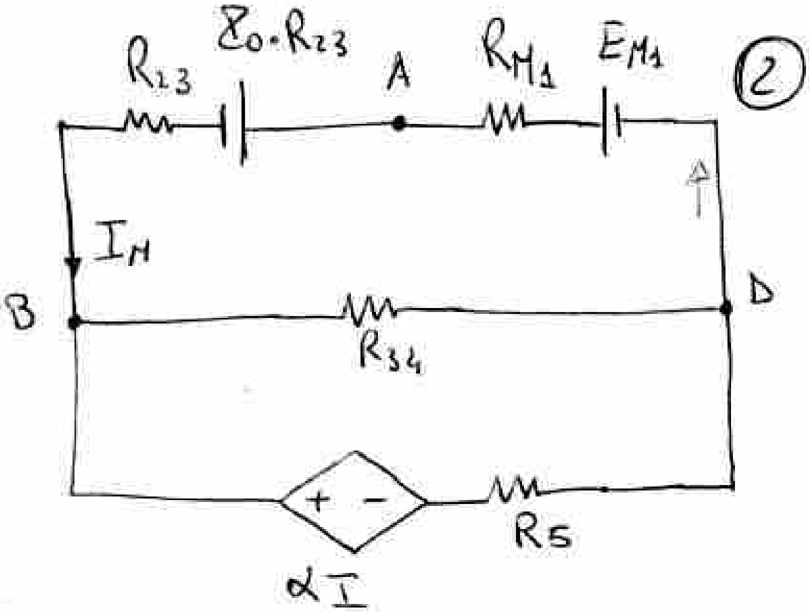


$$R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_4 + R_3 \cdot R_4}{R_4} =$$

$$= 6{,}5\,\Omega$$

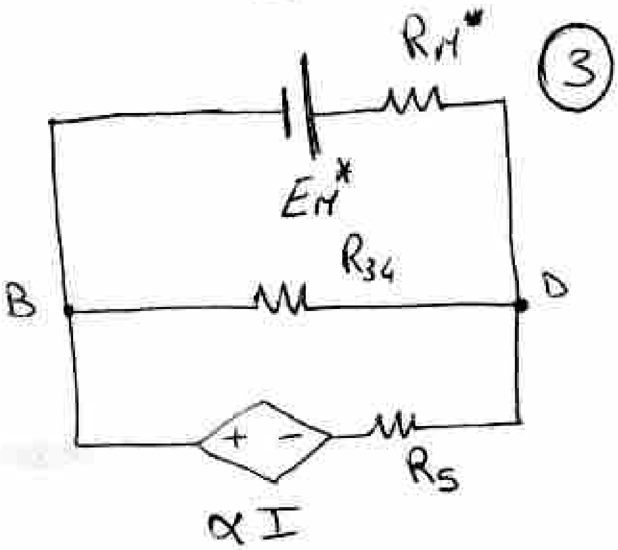
$$R_{24} = \frac{R_2 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_4 + R_3 \cdot R_4}{R_3} = 8{,}67\,\Omega$$

$$R_{34} = \frac{R_2 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_4 + R_3 \cdot R_4}{R_2} = 13\,\Omega$$



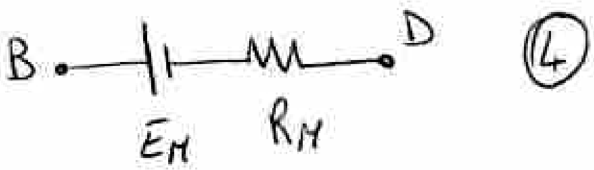
$$E_{M1} = \frac{\frac{E_1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{24}}} = 3{,}25\,V$$

$$R_{M1} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{24}}} = 1{,}62\,\Omega$$



$$E_M^* = I_0 R_{23} - E_{M1} = 3{,}25 - 3{,}25 =$$

$$= 0\,V \quad ; \quad R_M^* = R_{23} + R_{M1} = 8{,}12\,\Omega$$



$$E_M = \frac{\alpha I / R_5}{\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_{34}} + \frac{1}{R_M^*}} =$$

$= 1{,}42\, I$

$$V_{BD} = E_M = 1{,}42\, I \qquad (\text{DAL CIRCUITO } 4)$$

$$V_{BD} + I_0 R_{23} - E_{M1} = -\left(R_{23} + R_{M1}\right) I_M \quad \Rightarrow (\text{DAL CIRCUITO } 2)$$

$$\Rightarrow \quad I_M = -\frac{V_{BD}}{R_{23} + R_{M1}} = -\frac{1{,}42\, I}{R_{23} + R_{M1}}$$

$$V_{AD} - E_{M1} = -R_{M1} I_M \Rightarrow E_{M1} + \frac{R_{M1} \cdot 1{,}42\, I}{R_{M1} + R_{23}} = V_{AD}$$

(DAL CIRCUITO 1):

$$V_{AD} - E_1 = -R_1 I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{E_1 - V_{AD}}{R_1} =$$

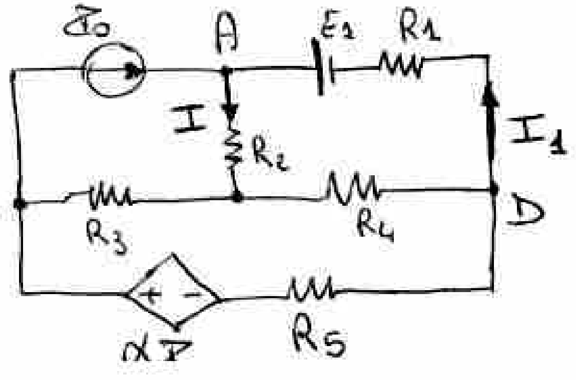
$$= \frac{E_1 - \left[E_{M1} + \dfrac{R_{M1} \cdot 1{,}42\, I}{R_{M1} + R_{23}}\right]}{R_1}$$; DALLA LEGGE AL NODO A:

*

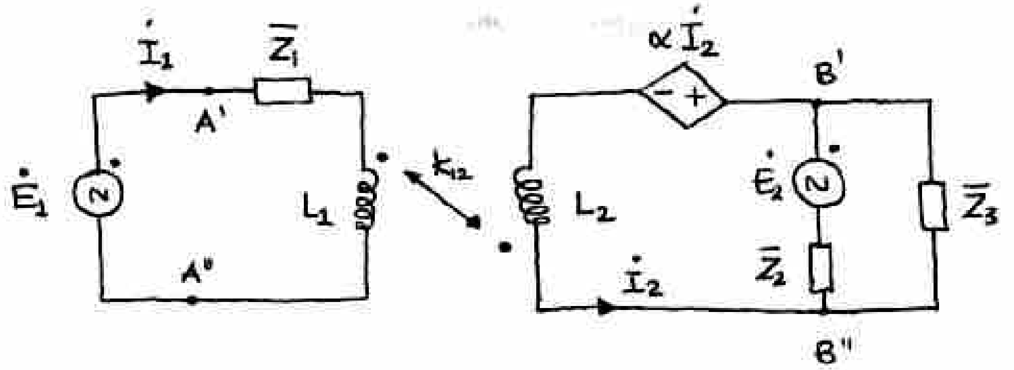
$$I = I_0 + I_1 = I_0 + \frac{E_1 - \left[E_{M1} + \dfrac{R_{M1} \cdot 1{,}42\, I}{R_{M1} + R_{23}}\right]}{R_1} = \ldots$$

$$= \ldots \Rightarrow I = \frac{I_0 + \dfrac{E_1}{R_1} - \dfrac{E_{M1}}{R_1}}{1 + \dfrac{R_{M1} \cdot 1{,}42}{R_1 \left(R_{M1} + R_{23}\right)}} = 0{,}76\ A$$

* NOTA:



Es. 2



(schema #1)

Si vuole determinare l'andamento temporale di $v_{A'A''}(t)$ e $i_1(t)$.

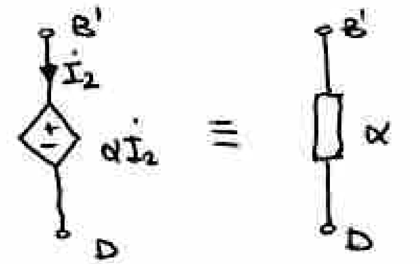
Dobbiamo quindi ottenere i fasori $\dot{V}_{A'A''}$ e $\dot{I}_1$ e poi trasformarli nel dominio del tempo.

Risulta subito : $\dot{V}_{A'A''} = \dot{E}_1 = 1V$

per cui : $v_{A'A''}(t) = \sqrt{2} \cdot \cos(2\pi f t)$

Per la determinazione di $\dot{I}_1$ procediamo come segue:

- applichiamo Millman ai due rami $B' - \dot{E}_2 - \bar{Z}_2 - B''$ e $B' - \bar{Z}_3 - B''$
- sostituiamo al generatore di tensione pilotato dalla corrente che lo attraversa l'impedenza α :

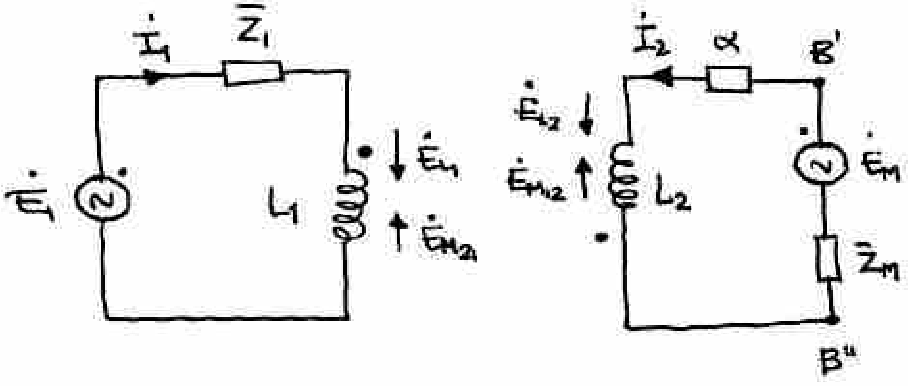


$\dot{V}_{B'D} = \alpha \dot{I}_2$

- determiniamo i coefficienti di mutua : $M_{12} = M_{21} = k_{12}\sqrt{L_1 L_2} = 0{,}56\,mH$

  e valutiamo la direzione delle forze di mutua induzione che sono opposte a quelle di auto visti i versi delle correnti ed i simboli dell'accoppiamento

Si ottiene il seguente circuito:



$$\dot{E}_M = \frac{\dot{E}_2/\bar{Z}_2}{\frac{1}{\bar{Z}_2}+\frac{1}{\bar{Z}_3}} = 1{,}15+j0{,}93 \text{ V}$$

$$\bar{Z}_M = \frac{1}{\frac{1}{\bar{Z}_2}+\frac{1}{\bar{Z}_3}} = 0{,}74+j2{,}03\ \Omega$$

- Scriviamo le equazioni alle due maglie:

$$\begin{cases} \dot{E}_1 + \dot{E}_{L_1} - \dot{E}_{M21} = \bar{Z}_1 \cdot \dot{I}_1 \\ \dot{E}_M + \dot{E}_{L_2} - \dot{E}_{M12} = (\alpha + \bar{Z}_M)\dot{I}_2 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} \dot{E}_1 - j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M_{21}\dot{I}_2 = \bar{Z}_1\dot{I}_1 \\ \dot{E}_M - j\omega L_2\dot{I}_2 + j\omega M_{12}\dot{I}_1 = (\alpha+\bar{Z}_M)\dot{I}_2 \end{cases}$$

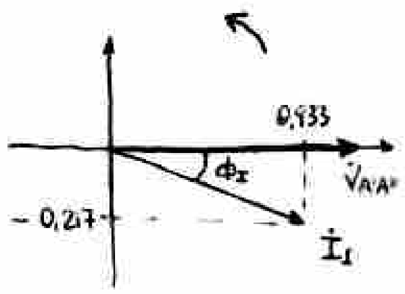
- Risolviamo il sistema per ottenere $\dot{I}_1$ e $\dot{I}_2$

$$\begin{cases} 1 - j\,0{,}31\,\dot{I}_1 + j\,0{,}17\,\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \\ 1{,}15 + j0{,}93 - j\,0{,}63\,\dot{I}_2 + j\,0{,}17\,\dot{I}_1 = (2{,}74+j2{,}03)\dot{I}_2 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dfrac{1+j0{,}17\dot{I}_2}{1+j0{,}31} = 0{,}91 - j0{,}28 + (0{,}05+j\,0{,}15)\dot{I}_2 \\ 1{,}15 + j0{,}93 - j0{,}63\dot{I}_2 + j0{,}15 + 0{,}05 + (j0{,}008 - 0{,}025)\dot{I}_2 = (2{,}74+j2{,}03)\dot{I}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \\ \dot{I}_2(-2{,}765 - j2{,}652) = -1{,}2 - j\,1{,}08 \Rightarrow \dot{I}_2 = 0{,}421 - j\,0{,}013 \text{ A} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \dot{I}_1 = 0{,}933 - j\,0{,}217 \text{ A}$$



$$i_1(t) = \sqrt{2} \cdot |\dot{I}_1| \cdot \cos(2\pi f t + \phi_I)$$

$$|\dot{I}_1| = 0{,}958 \text{ A}$$

$$\phi_I = \text{arctg} \frac{-0{,}217}{0{,}933} = -13{,}09° = -0{,}23 \text{ rad}$$

$$i_1(t) = 1{,}35 \cdot \cos(2\pi f t - 0{,}23) \text{ A}$$

- Rappresentiamo quindi le due curve

$$v_{A'A''} = \sqrt{2} \cdot \cos(2\pi f t)$$

$$i_1 = 1{,}35 \cdot \cos(2\pi f t - 0{,}23)$$

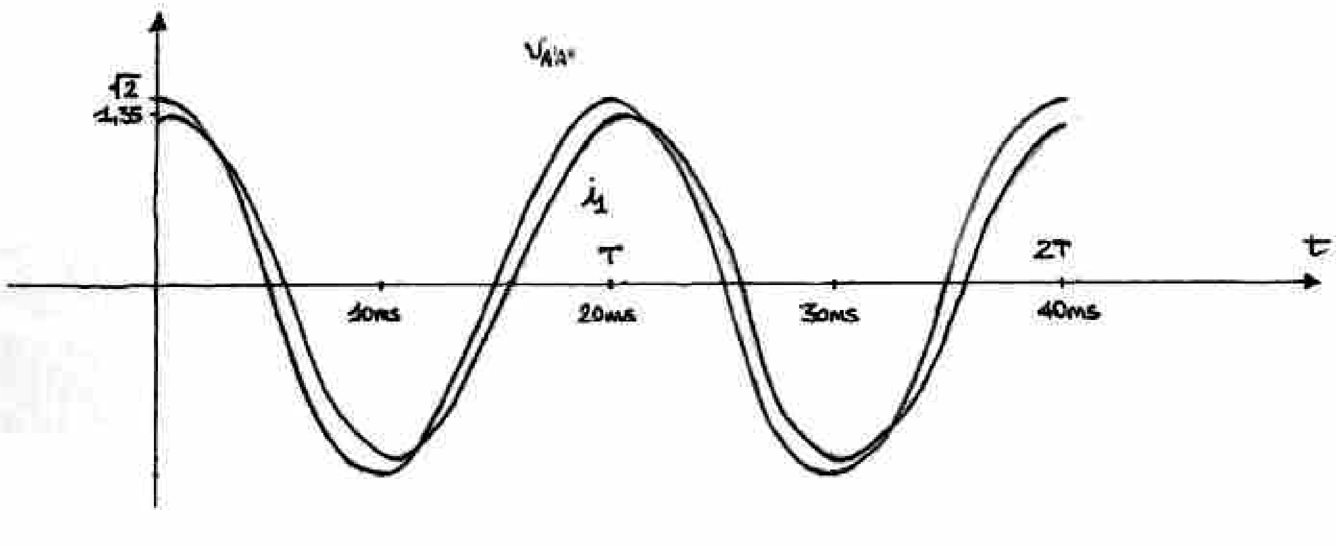
$v_{A'A''}$ e i_1 sono due cosinusoidi di periodo $T = 1/f = 20\text{msec}$;

$v_{A'A''}$ è una cosinusoide con fase iniziale nulla:

- per $t=0$ $\quad v_{A'A''} = \sqrt{2}$ V
- $v_{A'A''} = 0$ $\quad$ per $2\pi f t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k = 0, 1 \Rightarrow t = 5\text{ms}; 15\text{ms}$

i_1 è una cosinusoide con fase iniziale negativa:

- per $t=0$ $\quad i_1 = 1{,}31$ A
- $|i_1| = 1{,}35\text{A}$ $\quad$ per $2\pi f t - 0{,}23 = k\pi$ con $k = 0; 1 \Rightarrow t = 0{,}73\text{ms}; 10{,}73\text{ms}$
- $i_1 = 0$ $\quad$ per $2\pi f t - 0{,}23 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k = 0; 1 \Rightarrow t = 5{,}73\text{ms}; 15{,}73\text{ms}$.



La corrente i_1 è in ritardo rispetto alla tensione $v_{A'A''}$ (raggiunge i suoi massimi e minimi dopo $v_{A'A''}$) per cui il generatore $\dot{E}_1$ vede un carico ohmico-induttivo.

APPROFONDIMENTO (NON RICHIESTO)

Il ritardo della corrente i_1 sulla tensione $v_{A'A''}$ è di 0,23 rad corrispondente ad un tempo $\tau = 0{,}23 \cdot \frac{T}{2\pi} = 0{,}73\,ms$

Per il generatore (ideale) $\dot{E}_1$ sarebbe equivalente se tra A' e A'' ci fosse un carico $\bar{Z}_{eq} = \frac{|\dot{V}_{A'A''}|}{|\dot{I}_1|} e^{j0{,}23} = 1{,}04\, e^{j0{,}23} = 1{,}01 + j\,0{,}23\ \Omega$

Per calcolare le potenze sul carico $\bar{Z}_3$, dobbiamo determinare $\dot{V}_{B'B''}$ e $\dot{I}_3$:

$\dot{V}_{B'B''} = \dot{E}_M - \bar{Z}_M \dot{I}_2 = 0{,}81 + j\,0{,}08\ V$

$\dot{I}_3 = \frac{\dot{V}_{B'B''}}{\bar{Z}_3} = 0{,}1 - j\,0{,}15\ A$

La potenza complessa è $\bar{S} = \dot{V}_{B'B''} \cdot \overset{\smile}{I}_3 = 0{,}07 + j\,0{,}13\ VAC$

per cui:

potenza attiva $= P = 0{,}07\ W$

potenza reattiva $= Q = 0{,}13\ VAR$ ($Q>0$, $\bar{Z}_3$ infatti è ohmico-induttivo)

potenza apparente $= |\bar{S}| = 0{,}15\ VA$