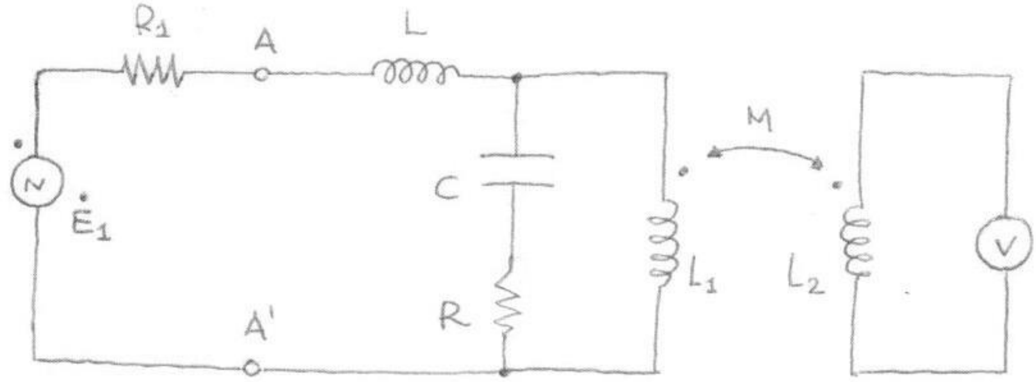
COMPITO DI ELETTROTECNICA

Allievo .... Messina, 01.03.2016

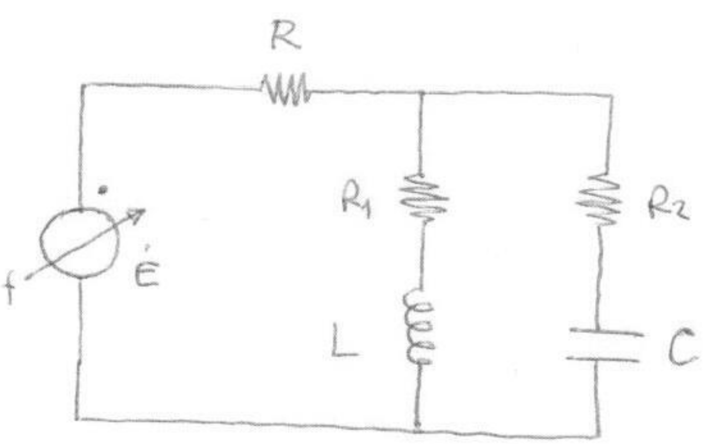
1. Il sistema in figura è a regime. Considerato che il voltmetro è ideale, determinare la potenza complessa che transita nella sezione A-A'.

$\dot{E}_1 = 5e^{j\frac{\pi}{4}}$ V, f=50 Hz, R_1=1 Ω, R=5 Ω, C=1 mF, L=0.01 H, L_1=12mH, L_2=20mH, M=2mH.



2. Dato il circuito in figura, determinare l'equazione le cui soluzioni rappresentano le frequenze di risonanza della rete vista dal generatore.

R=R_1=10 Ω, R_2=20 Ω, C=10 μF, L=100 mH.



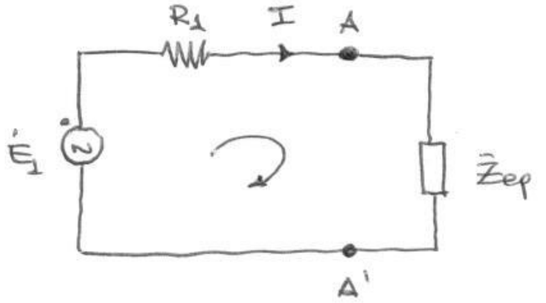
Es. 1

Tenuto conto che il voltmetro collegat a L_2 è ideale, esso si comporta da circuito aperto, quindi su L_2 non scorre corrente.

Su L_2 si crea una forza di mutua induzione dovuta alla corrente che scorre su L_1, mentre su L_1 si crea solo la forza di autoinduzione.

Per quanto detto, ciò che accade nella parte sinistra del circuito assegnato non dipende da ciò che avviene su L_2.

Effettuiamo quindi il parallelo tra L_1 e RC e questo lo mettiamo in serie a L. Si ottiene:



$$\bar{Z}_{ep} = j\omega L + \frac{j\omega L_1 \cdot \left(R - j\frac{1}{\omega C}\right)}{j\omega L_1 + R - j\frac{1}{\omega C}} = 2{,}80 + j6{,}58\ \Omega$$

$$\dot{E}_1 = 5\cos\frac{\pi}{4} + j5\,\text{sen}\frac{\pi}{4} = 3{,}54 + j\,3{,}54\ V$$

Dalla legge alla maglia:
$$\dot{I} = \frac{\dot{E}_1}{R_1 + \bar{Z}_{ep}} = 0{,}64 - j0{,}17\ A$$

Inoltre:
$$\dot{V}_{AA'} = \bar{Z}_{ep} \cdot \dot{I} = 2{,}90 + j3{,}71\ V$$

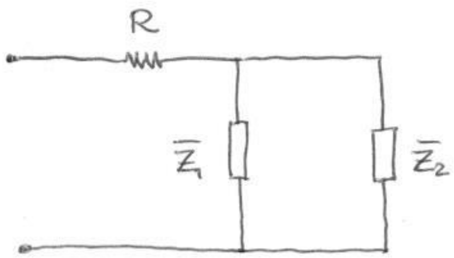
ed infine:
$$\bar{S}_{AA'} = \dot{V}_{AA'}\,\breve{I} = 1{,}21 + j\,2{,}85\ \text{VAC}$$

Es. 2

La rete vista dal generatore risuona se l'impedenza equivalente vista dal generatore è puramente resistiva.

Determiniamo l'impedenza equivalente, che sarà funzione della pulsazione ω, e poniamo uguale a zero la sua parte immaginaria.

Quella sarà l'equazione richiesta dal problema, cioè quella che ha come soluzioni le pulsazioni di risonanza.



$$\overline{Z}_1 = R_1 + j\omega L$$

$$\overline{Z}_2 = R_2 - \frac{j}{\omega C}$$

$$\overline{Z}_p = \frac{\overline{Z}_1 \cdot \overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2}$$

$$\overline{Z}_{eq} = R + \overline{Z}_p$$

$\overline{Z}_{eq}$ è puramente resistiva se lo è $\overline{Z}_p$ quindi lavoriamo su $\overline{Z}_p$ e determiniamo la sua parte immaginaria da uguagliare a zero.

$$\overline{Z}_p = \frac{(R_1 + j\omega L)\cdot\left(R_2 - \frac{j}{\omega C}\right)}{R_1 + j\omega L + R_2 - \frac{j}{\omega C}} = \frac{(R_1 + j\omega L)\cdot \frac{\omega C R_2 - j}{\cancel{\omega C}}}{\frac{\omega C R_1 + j\omega^2 CL + \omega C R_2 - j}{\cancel{\omega C}}} =$$

$$= \frac{\omega C R_1 R_2 + \omega L - jR_1 + j\omega^2 LCR_2}{\omega C R_1 + \omega C R_2 - j + j\omega^2 CL} = \frac{\omega(CR_1R_2 + L) + j(\omega^2 LCR_2 - R_1)}{\omega C(R_1 + R_2) + j(\omega^2 CL - 1)}$$

Razionalizziamo:

$$\bar{Z}_p = \frac{\omega(CR_1R_2 + L) + j(\omega^2 LCR_2 - R_1)}{\omega C(R_1+R_2) + j(\omega^2 CL - 1)} \cdot \frac{\omega C(R_1+R_2) - j(\omega^2 CL - 1)}{\omega C(R_1+R_2) - j(\omega^2 CL - 1)} =$$

$$= \frac{\omega^2 C(R_1+R_2)(CR_1R_2+L) + (\omega^2 LCR_2 - R_1)(\omega^2 CL - 1) + j\left[\omega C(R_1+R_2)(\omega^2 LCR_2 - R_1) - \omega(CR_1R_2+L)(\omega^2 CL-1)\right]}{\omega^2 C^2 (R_1+R_2)^2 + (\omega^2 CL - 1)^2}$$

$\leftarrow \mathrm{Im}\{\bar{Z}_p\}$

La parte immaginaria di $\bar{Z}_p$ è quella evidenziata.

Affinché sia nulla, deve essere nullo il numeratore, per cui:

$$\omega C(R_1+R_2)(\omega^2 LCR_2 - R_1) - \omega(CR_1R_2+L)(\omega^2 CL - 1) = 0$$

$$\left[LC^2R_2(R_1+R_2) - CL(CR_1R_2+L)\right]\omega^3 + \left[CR_1R_2 + L - CR_1(R_1+R_2)\right]\omega = 0$$

Questa è l'equazione richiesta.

Sostituendo i valori di R_1, R_2, L, C, si ha

$$-9{,}5 \cdot 10^{-8}\,\omega^3 + 0{,}099\,\omega = 0$$

Volendo, si possono trovare facilmente le soluzioni:

$$\omega\,(9{,}5 \cdot 10^{-8}\,\omega^2 - 0{,}099) = 0$$

$$\begin{cases} \omega = 0 & \text{soluzione banale} \\ \omega = \sqrt{\dfrac{0{,}099}{9{,}6 \cdot 10^{-8}}} = 1{,}016 \cdot 10^3 \text{ rad/sec} \;\longrightarrow\; f_{RIS} = \dfrac{\omega}{2\pi} = 161{,}6 \text{ Hz} \\ \omega = -\sqrt{\dfrac{0{,}099}{9{,}6 \cdot 10^{-8}}} & \text{soluzione priva di significato} \end{cases}$$