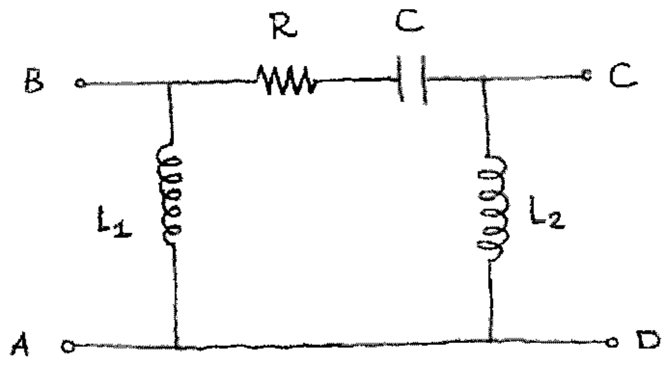
COMPITO DI ELETTROTECNICA 03/07/2013

Allievo...Matricola........................

Corso di Laurea ....

Esercizio 1

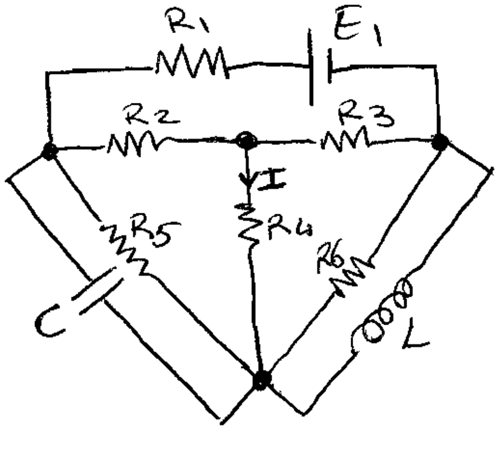
Data la rete in figura, determinare le espressioni delle tre frequenze di risonanza dai punti A-B, B-C e C-D in funzione di R, C, L_1 e L_2.



Esercizio 2

Il sistema in figura si trova a regime. Determinare la corrente I.

E_1=4V;R_1=1 Ω; R_2= R_3=2Ω; R_4=4 Ω; R_5= R_6=5 Ω; C=1mF; L=1mH

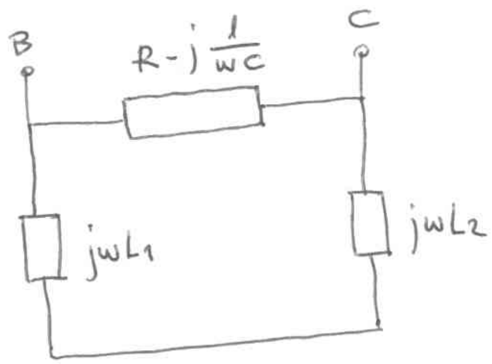


Soluzione Es. 1

Ricordiamo che una rete risuona da due suoi punti se l'impedenza vista da quei due punti è puramente resistiva.

Calcoliamo quindi le impedenze viste da A-B, $\overline{Z}_{AB}$, da B-C, $\overline{Z}_{BC}$, e da C-D, $\overline{Z}_{CD}$.

Per semplicità, disegnamo la rete evidenziando le impedenze di ogni ramo.



Cominciamo con $\overline{Z}_{BC}$:

$$\overline{Z}_{BC} = \left(R - j\frac{1}{\omega C}\right) // \left(j\omega L_1 + j\omega L_2\right) =$$

$$= \frac{\left(R - j\frac{1}{\omega C}\right) \cdot j\omega L_{12}}{R + j\left(\omega L_{12} - \frac{1}{\omega C}\right)} = \quad (\text{con } L_{12} = L_1 + L_2)$$

$$= \frac{\left[j\omega R L_{12} + \frac{L_{12}}{C}\right] \cdot \left[R - j\left(\omega L_{12} - \frac{1}{\omega C}\right)\right]}{\left[R + j\left(\omega L_{12} - \frac{1}{\omega C}\right)\right] \cdot \left[R - j\left(\omega L_{12} - \frac{1}{\omega C}\right)\right]} =$$

$$= \frac{\left[\frac{R L_{12}}{C} + \omega R L_{12}\left(\omega L_{12} - \frac{1}{\omega C}\right)\right] + j\left[\omega R^2 L_{12} - \frac{L_{12}}{C}\left(\omega L_{12} - \frac{1}{\omega C}\right)\right]}{R^2 + \left(\omega L_{12} - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$= \frac{\left[\frac{R L_{12}}{C} + \omega^2 R L_{12}^2 - \frac{R L_{12}}{C}\right] + j\left[\omega R^2 L_{12} - \frac{\omega L_{12}^2}{C} + \frac{L_{12}}{\omega C^2}\right]}{R^2 + \left(\omega L_{12} - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

La $\bar{Z}_{BC}$ si può quindi scrivere come

$$\bar{Z}_{BC} = \mathrm{Re}\{\bar{Z}_{BC}\} + j\,\mathrm{Im}\{\bar{Z}_{BC}\}$$

con $\mathrm{Re}\{\bar{Z}_{BC}\} = \dfrac{\omega^2 R L_{12}^2}{R^2 + \left(\omega L_{12} - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ e $\mathrm{Im}\{\bar{Z}_{BC}\} = \dfrac{\omega R^2 L_{12} - \frac{\omega L_{12}^2}{C} + \frac{L_{12}}{\omega C^2}}{R^2 + \left(\omega L_{12} - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$

Affinché la rete vista da B-C risuoni, la $\bar{Z}_{BC}$ deve essere puramente resistiva, cioè reale, quindi dovrà essere $\mathrm{Im}\{\bar{Z}_{BC}\} = 0$

Ciò accade se il numeratore di $\mathrm{Im}\{\bar{Z}_{BC}\}$ è uguale a zero ed il suo denominatore diverso da zero.

Quest'ultima condizione si verifica sempre se $R \neq 0$ o $\omega \neq \frac{1}{\sqrt{L_{12}C}}$

La prima condizione si verifica se:

$$\omega R^2 L_{12} - \frac{\omega L_{12}^2}{C} + \frac{L_{12}}{\omega C^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\omega^2 R^2 C^2 - \omega^2 C L_{12} + 1}{\omega C^2} = 0$$

Considerando $C \neq 0$, altrimenti tra B e C avremmo impedenza infinita, si ha:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{C L_{12} - R^2 C^2} \quad ; \quad \omega_0 = \pm \sqrt{\frac{1}{C L_{12} - R^2 C^2}}$$

Nella condizione in cui $C L_{12} - R^2 C^2 > 0$ allora, escludendo la soluzione negativa priva di significato fisico, si ha

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{C L_{12} - R^2 C^2}} \Rightarrow f_{RIS_{BC}} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{C L_{12} - R^2 C^2}}$$

La $\bar{Z}_{AB}$ è

$$\bar{Z}_{AB} = (j\omega L_1) \parallel \left(R + j\omega L_2 - j\frac{1}{\omega C}\right) =$$

$$= \frac{j\omega L_1 \left(R + j\omega L_2 - j\frac{1}{\omega C}\right)}{R + j\omega L_{12} - j\frac{1}{\omega C}} =$$

$$= \frac{\left[\frac{L_1}{C} - \omega^2 L_1 L_2 + j\omega R L_1\right] \cdot \left[R - j\left(\omega L_{12} - \frac{1}{\omega C}\right)\right]}{R^2 + \left(\omega L_{12} - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\mathrm{Re}\left\{\bar{Z}_{AB}\right\} = \frac{\cancel{\frac{RL_1}{C}} - \omega^2 R L_1 L_2 + \omega^2 R L_1 L_{12} - \cancel{\frac{RL_1}{C}}}{R^2 + \left(\omega L_{12} - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\mathrm{Im}\left\{\bar{Z}_{AB}\right\} = \frac{\omega R^2 L_1 - \left(\frac{L_1}{C} - \omega^2 L_1 L_2\right)\left(\omega L_{12} - \frac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \left(\omega L_{12} - \frac{1}{\omega C}\right)^2} =$$

$$= \frac{\omega R^2 L_1 - \frac{\omega L_1 L_{12}}{C} + \frac{L_1}{\omega C^2} + \omega^3 L_1 L_2 L_{12} - \frac{\omega L_1 L_2}{C}}{R^2 + \left(\omega L_{12} - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\mathrm{Im}\left\{\bar{Z}_{AB}\right\} = 0$$

per
$$\frac{\omega^2 R^2 C^2 L_1 - \omega^2 C L_1 L_{12} + L_1 + \omega^4 C^2 L_1 L_2 L_{12} - \omega^2 C L_1 L_2}{\omega C^2} = 0$$

$$C^2 L_1 L_2 L_{12} \cdot \omega^4 + \left(R^2 C^2 L_1 - C L_1 L_{12} - C L_1 L_2\right)\omega^2 + L_1 = 0$$

$$C^2 L_2 L_{12}\, \omega^4 + \left(R^2 C^2 - C L_{12} - C L_2\right)\omega^2 + 1 = 0$$

da cui:

$$\omega_0^2 = \frac{(CL_{12}+CL_2-R^2C^2) \pm \sqrt{(CL_{12}+CL_2-R^2C^2)^2 - 4C^2L_2L_{12}}}{2C^2L_2L_{12}} =$$

$$= \frac{L_{12}+L_2-R^2C \pm \sqrt{(L_{12}+L_2-R^2C)^2 - 4L_2L_{12}}}{2CL_2L_{12}}$$

Nella condizione in cui il radicando sia maggiore di zero, cioè $(L_{12}+L_2-R^2C)^2 > 4L_2L_{12}$

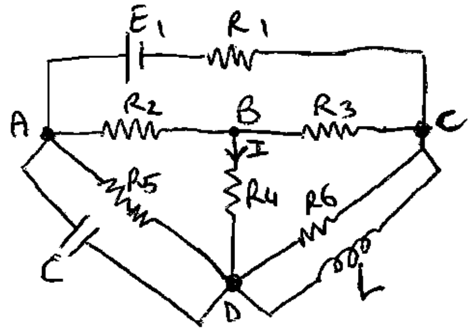
e l'intera quantità a secondo membro sia positiva, allora:

$$f_{RIS,AB} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{L_{12}+L_2-R^2C \pm \sqrt{(L_{12}+L_2-R^2C)^2 - 4L_1L_{12}}}{2CL_2L_{12}}}$$

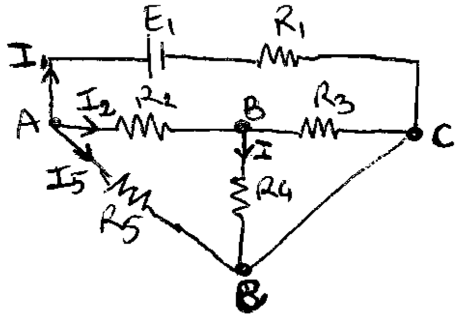
Per simmetria la frequenza di risonanza della rete dai punti C-D si ottiene dalla precedente, sostituendo L_1 con L_2 e viceversa.

In entrambi i casi si possono avere anche due frequenze di risonanza, visto il segno $\pm$, sempre a condizione che la quantità sotto radice sia positiva.

ES. N° 2

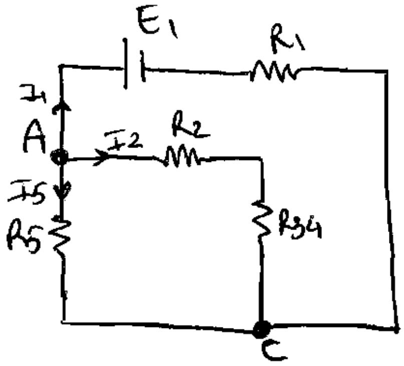


L si comporta da c.c e quindi R6 si può trascurare in quanto parallelo ad un corto circuito.
C si comporta da c.a.
Ridisegniamo il circuito:



$$R_{34} = R_3 \parallel R_4$$

Applichiamo Millmann tra i punti A-C:



=>

$$E_M = \frac{\frac{E_1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{(R_2+R_{34})} + \frac{1}{R_5}}$$

$$V_{AC} = E_M$$

$$V_{AC} = E_1 + I_1 R_1 \Rightarrow I_1 = \frac{V_{AC} - E_1}{R_1}$$

$$V_{AC} = I_5 R_5 \Rightarrow I_5 = \frac{V_{AC}}{R_5}$$

$$I_2 = -I_5 + I_1$$

$$V_{AB} = I_2 R_2$$

$$V_{AC} = V_{AB} + V_{BC} \Rightarrow V_{BC} = V_{AC} - V_{AB}$$

$$V_{BC} = I R_4 \Rightarrow I = \frac{V_{BC}}{R_4}$$