UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MESSINA
Dipartimento di Ingegneria
Contrada Di Dio I, 98166 – Villaggio S. Agata Messina

Appunti Corso di Elettrotecnica

Teorema di Ampere

Anno Accademico 2020-2021

prof. ing. Bruno Azzerboni

Fonti:
Lezioni di Elettrotecnica Generale *- Giulio Battistini*
Colombo Cursi Pisa
Video online *Politecnico di Milano (Davide Contini)*
Video online: *https://www.youtube.com/watch?v=yTzTAaKa6t8*

1. Teorema di Ampere (circuitazione) per il campo magnetico
Così come la componente normale del campo elettrico è legata alle cariche che lo generano tramite il teorema di Gauss, la componente tangente del campo magnetico è legata alle correnti che lo generano tramite il teorema di Ampere.
Prima di parlare del teorema di Ampere, occorre introdurre il concetto di ***circuitazione di un campo vettoriale***.
Supponiamo di avere, figura 1:

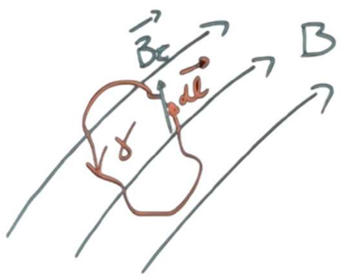

Figura 1

- un campo magnetico $\vec{B}$ rappresentato con le proprie linee di forza;
- una linea chiusa γ orientata e quindi con un proprio verso di percorrenza che consideriamo positivo.

Definiamo un elemento infinitesimo $\overrightarrow{dl}$ di questa linea e consideriamo la proiezione del campo magnetico lungo la linea dl, questa proiezione (componente tangenziale) la chiamiamo $\vec{B}_t$.
Il prodotto del modulo di $\vec{B}_t$ per la lunghezza di $\overrightarrow{dl}$ rappresenta una parte della circuitazione completa del campo $\vec{B}$ lungo la linea chiusa γ. Quindi se per ogni elementino $\overrightarrow{dl}$ possibile all'interno della linea γ calcoliamo la proiezione del campo $\vec{B}$ in quel punto e moltiplichiamo il modulo di $\vec{B}_t$ per la lunghezza di $\overrightarrow{dl}$ e poi sommiamo tutti questi contributi, otteniamo la ***circuitazione*** del campo $\vec{B}$ lungo la linea γ.

Quindi la circuitazione di un campo vettoriale, in questo caso $\vec{B}$, lungo una linea γ è data da:

$$\Lambda_\gamma(\vec{B}) = \vec{B}_{t1}\overrightarrow{dl_1} + \vec{B}_{t2}\overrightarrow{dl_2} + \cdots + \vec{B}_{tn}\overrightarrow{dl_n}$$

Il ***teorema di Ampere*** dice che la circuitazione di un campo magnetico è uguale alla permeabilità magnetica del vuoto μ_0 moltiplicata per la somma algebrica delle correnti concatenate con la linea γ.

$$\Lambda_\gamma(\vec{B}) = \mu_0 \sum_{1}^{n} I_{conc}$$

Per capire cosa sia una corrente concatenata riferiamoci alla figura 2

Figura 2

Immaginiamo di avere una linea γ chiusa, le correnti concatenate sono tutte quelle che attraversano la superficie racchiusa dalla linea γ. Quindi la corrente I_1 è concatenata con la linea γ, invece la corrente I_2, che non attraversa la superficie racchiusa da γ, non è concatenata e quindi non contribuisce alla circuitazione. Anche una corrente I_3 che attraversa γ più volte sarà concatenata e sarà concatenata tante volte quante sono le volte che la corrente attraversa la superficie. Nel nostro caso I_3 sarà concatenata due volte, una volta attraversando la superficie dal basso verso l'alto e l'altra volta attraversando la superficie dall'alto verso il basso.

In funzione del verso di γ e del verso di attraversamento della corrente, le correnti contribuiranno in maniera positiva o negativa alla circuitazione del campo $\vec{B}$; tutto è sempre legato alla regola della mano destra, come si chiude il palmo è individuato dal verso di γ e, di conseguenza, come il pollice è posizionato individua il verso positivo di attraversamento di γ. In questo caso I_1 dà contributo positivo, il primo passaggio di I_3, dal basso verso l'alto, dà contributo positivo, mentre invece il secondo passaggio di I_3, dall'alto verso il basso, dà contributo negativo.

Da notare che il teorema di Ampere è il duale del teorema di Gauss per il campo elettrico.

1.2 Dimostrazione del teorema di Ampere per il campo magnetico

Consideriamo un conduttore percorso da una corrente con verso uscente dal foglio, figura 3, e calcoliamo la circuitazione del campo magnetico su una circonferenza di raggio r centrata sull'asse del conduttore e giacente su di un piano perpendicolare al conduttore stesso. La corrente è una corrente concatenata con la curva.

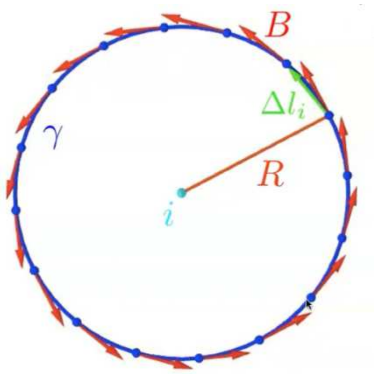

Figura 3

$$\Lambda_\gamma(\vec{B}) = \vec{B}\cdot\overrightarrow{\Delta l_1} + \vec{B}\cdot\overrightarrow{\Delta l_2} + \cdots + \vec{B}\cdot\overrightarrow{\Delta l_n} = B\Delta_{l1}\cos\alpha + B\,\Delta_{l2}\cos\alpha + \cdots + B\Delta_{ln}\cos\alpha$$

dove α è l'angolo compreso tra il vettore $\vec{B}$ ed il vettore $\overrightarrow{\Delta l}$.

Se $\overrightarrow{\Delta l}$ che è molto piccolo tende a 0, allora $\cos\alpha$ tende a 1, inoltre per simmetria il modulo del vettore $\vec{B}$ è uguale per tutti i punti della circonferenza essendo questi equidistanti dal conduttore. Quindi:

$$\Lambda_\gamma(\vec{B}) = B(\Delta_{l1} + \Delta_{l2} + \cdots + \Delta_{ln})$$

Il modulo di $\vec{B}$ in base alla legge di Biot-Savart è pari a:

$$B = \mu_0\frac{I_{conc}}{2\pi R}$$

La somma di tutti i Δ_n è pari alla circonferenza e quindi:

$$(\Delta_{l1} + \Delta_{l2} + \cdots + \Delta_{ln}) = 2\pi R$$

Di conseguenza:

$$\Lambda_\gamma(\vec{B}) = B(\Delta_{l1} + \Delta_{l2} + \cdots + \Delta_{ln}) = \mu_0\frac{I_{conc}}{2\pi R}2\pi R = \mu_0 I_{conc}$$

Dove I è la corrente concatenata con la circonferenza.

Se ci fossero più correnti concatenate avremmo:

$$\Lambda_\gamma(\vec{B}) = \mu_0\sum_1^n I_{conc}$$

c.v.d.

2. Teorema di Ampere (circuitazione) per il campo elettrostatico

Consideriamo una regione in cui è presente un campo elettrico costante ed uniforme, all'interno della regione scegliamo arbitrariamente una linea chiusa L orientata, vogliamo calcolare la circuitazione del campo elettrico lungo questa linea chiusa, figura 4.

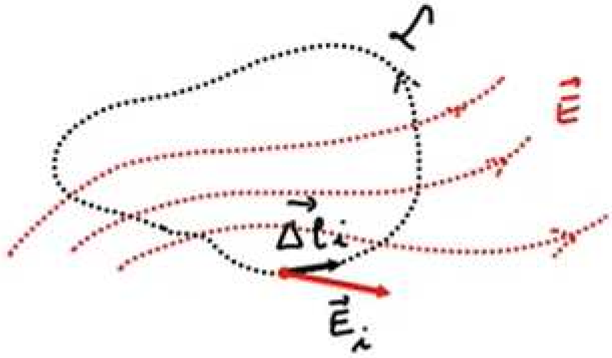

Figura 4

Da quanto detto precedentemente, dopo aver suddiviso la linea in tanti tratti elementari, avremo:

$$\Lambda_L(\vec{E}) = \sum_i^n \vec{E}_i \cdot \overrightarrow{\Delta_{li}}$$

Il vettore $\vec{E}_i$ uguale al rapporto tra la forza agente su una carica di prova posta in quel punto e la carica di prova stessa:

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}_i}{q}$$

Sostituendo avremo:

$$\Lambda_L(\vec{E}) = \sum_i^n \frac{\vec{F}_i}{q} \cdot \overrightarrow{\Delta_{li}} = \frac{1}{q} \sum_i^n \vec{F}_i \cdot \overrightarrow{\Delta_{li}}$$

Ma il prodotto $\vec{F}_i \cdot \overrightarrow{\Delta_{li}}$ è il lavoro compiuto dalla forza elettrica sul tratto Δ_{li} e quindi è il lavoro elementare, ne consegue che $\sum_i^n \vec{F}_i \cdot \overrightarrow{\Delta_{li}}$. È il lavoro complessivo compiuto dalla forza elettrica sull'intera linea L. Noi sappiamo che la forza elettrostatica $\vec{F}_i$ è conservativa e quindi il lavoro da essa compiuto lungo una linea chiusa è zero, quindi:

$$\Lambda_L(\vec{E}) = \sum_i^n \vec{E}_i \cdot \overrightarrow{\Delta_{li}} = 0$$

Sommario