UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MESSINA
*Dipartimento di Ingegneria*
*Contrada Di Dio I, 98166 – Villaggio S. Agata Messina*

# *Appunti Corso di Elettrotecnica*

***Circuiti equivalenti di accoppiamenti mutui***

*Anno Accademico 2016-2017*

*prof. ing. Bruno Azzerboni*

***Fonti:***
***Lezioni di Elettrotecnica Generale*** *- Giulio Battistini*
*Colombo Cursi Pisa*

***Circuiti equivalenti di accoppiamenti mutui***

***1.1 Circuito equivalente a T***

Sia dato il seguente sistema di fig. 1:

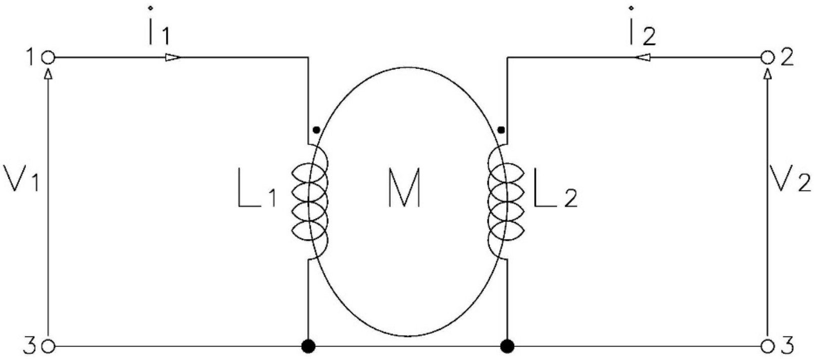


*Fig. 1*

e si noti che i due induttori hanno un morsetto a comune. Un sistema in questa configurazione ammette un circuito equivalente costituito da semplici induttanze, non più accoppiate mutuamente, collegate a T (a stella) come riportato in figura 2.

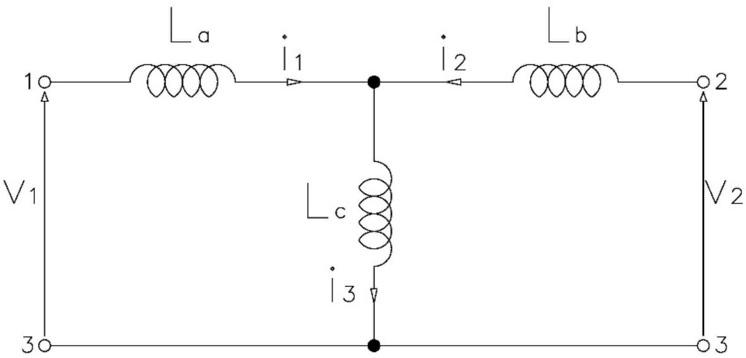


*Fig. 2*

Riferendosi al circuito di figura 1, possiamo scrivere:

$$v_1 + e_{L1} + e_{M21} = 0$$
$$v_2 + e_{L2} + e_{M12} = 0$$

e poiché entrambe le correnti entrano nei morsetti contrassegnati è $M > 0$, quindi

$$v_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} - M_{21} \frac{di_2}{dt} = 0$$
$$v_2 - L_2 \frac{di_2}{dt} - M_{12} \frac{di_1}{dt} = 0$$

cioè

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{21} \frac{di_2}{dt}$$
$$v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{12} \frac{di_1}{dt}$$

e ricordando il teorema di reciprocità $M_{21} = M_{21} = M$, otteniamo il sistema dell'equilibrio elettrico del circuito:

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases} \qquad (A)$$

Riferendosi, invece, al circuito di figura 2 scriviamo:

$$v_1 + e_{La} + e_{Lc} = 0$$
$$v_2 + e_{L2} + e_{Lc} = 0$$
$$i_1 + i_2 = i_3$$

da cui

$$v_1 - L_a \frac{di_1}{dt} - L_c \frac{di_3}{dt} = 0$$
$$v_2 - L_2 \frac{di_2}{dt} - L_c \frac{di_3}{dt} = 0$$
$$i_1 + i_2 = i_3$$

quindi

$$v_1 = L_a \frac{di_1}{dt} + L_c \frac{di_3}{dt}$$
$$v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + L_c \frac{di_3}{dt}$$
$$i_3 = i_1 + i_2$$

sostituendo la $i_3$ abbiamo

$$v_1 = L_a \frac{di_1}{dt} + L_c \frac{di_1}{dt} + L_c \frac{di_2}{dt}$$
$$v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + L_c \frac{di_1}{dt} + L_c \frac{di_2}{dt}$$

da cui

$$\begin{cases} v_1 = (L_a + L_c) \frac{di_1}{dt} + L_c \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = L_c \frac{di_1}{dt} + (L_b + L_c) \frac{di_2}{dt} \end{cases} \qquad (B)$$

Quindi, confrontando i sistemi (A) e (B) si ha

$$\begin{cases} L_a + L_c = L_1 \\ L_c = M \\ L_b + L_c = L_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_a = L_1 - M \\ L_c = M \\ L_b = L_2 - M \end{cases}$$

per cui il circuito equivalente a T del sistema di figura 1, è

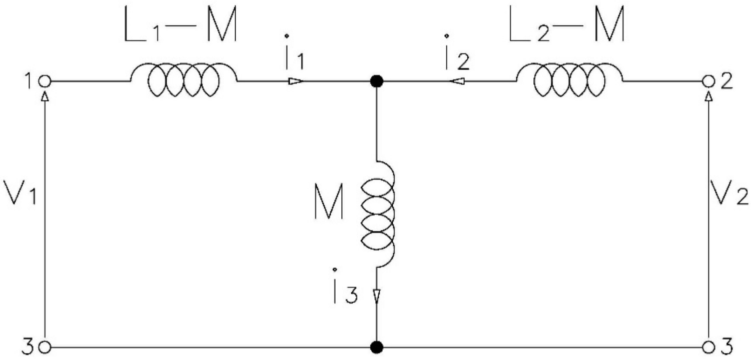


*Fig. 3*

### *1.2 Circuito equivalente a* $\Pi$

Così come c'è l'equivalente a T, esiste anche l'equivalente detto a P-greco che è riportato in figura 4:

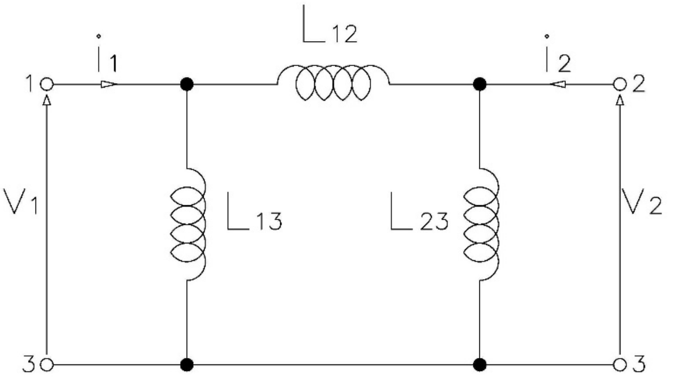


*Fig. 4*

Dobbiamo determinare quindi i valori dei parametri $L_{12}$, $L_{13}$ ed $L_{23}$ e per fare ciò studiamo l'equivalenza tra i circuiti di figura 3 e di figura 4. Affinché sussista l'equivalenza dobbiamo imporre che l'impedenza vista da due morsetti corrispondenti sia uguale per i due circuiti, quindi, per calcolare questa impedenza immaginiamo di alimentare di volta in volta il circuito solo dai morsetti in esame

Dalla figura 3

- impedenza vista dai morsetti 1-3

$$L_{13}^{*} = (L_1 - M) + M = L_1$$

- impedenza vista dai morsetti 2-3

$$L_{23}^{*} = (L_2 - M) + M = L_2$$

- impedenza vista dai morsetti 1-2

$$L_{12}^{*} = (L_1 - M) + (L_2 - M) = L_1 + L_2 - 2M$$

Dalla figura 4

- impedenza vista dai morsetti 1-3

$$L_{13}^{*} = \frac{L_{13}(L_{12} + L_{23})}{L_{12} + L_{23} + L_{13}}$$

- impedenza vista dai morsetti 2-3

$$L_{23}^{*} = \frac{L_{23}(L_{12} + L_{13})}{L_{12} + L_{23} + L_{13}}$$

- impedenza vista dai morsetti 1-2

$$L_{12}^{*} = \frac{L_{12}(L_{13} + L_{23})}{L_{12} + L_{23} + L_{13}}$$

le impedenze così calcolate sia per il circuito di fig. 3, sia per quello di fig. 4, devono essere uguali e, di conseguenza, dobbiamo imporre che

$$L_1 = \frac{L_{13}(L_{12} + L_{23})}{L_{12} + L_{23} + L_{13}}$$

$$L_2 = \frac{L_{23}(L_{12} + L_{13})}{L_{12} + L_{23} + L_{13}}$$

$$L_1 + L_2 - 2M = \frac{L_{12}(L_{13} + L_{23})}{L_{12} + L_{23} + L_{13}}$$

da quest'ultima si ricava

$$\frac{L_{13}(L_{12} + L_{23})}{L_{12} + L_{23} + L_{13}} + \frac{L_{23}(L_{12} + L_{13})}{L_{12} + L_{23} + L_{13}} - 2M = \frac{L_{12}(L_{13} + L_{23})}{L_{12} + L_{23} + L_{13}}$$

$$2M = -\frac{L_{12}(L_{13} + L_{23})}{L_{12} + L_{23} + L_{13}} + \frac{L_{13}(L_{12} + L_{23})}{L_{12} + L_{23} + L_{13}} + \frac{L_{23}(L_{12} + L_{13})}{L_{12} + L_{23} + L_{13}}$$

$$2M = \frac{-L_{12}L_{13} - L_{12}L_{23} + L_{13}L_{12} + L_{13}L_{23} + L_{23}L_{12} + L_{23}L_{13}}{L_{12} + L_{23} + L_{13}}$$

$$2M = \frac{2L_{13}L_{23}}{L_{12} + L_{23} + L_{13}}$$

$$M = \frac{L_{13}L_{23}}{L_{12} + L_{23} + L_{13}}$$

e, ricapitolando

$$\begin{cases} L_1 = \dfrac{L_{13}(L_{12} + L_{23})}{L_{12} + L_{23} + L_{13}} \\ L_2 = \dfrac{L_{23}(L_{12} + L_{13})}{L_{12} + L_{23} + L_{13}} \\ M = \dfrac{L_{13}L_{23}}{L_{12} + L_{23} + L_{13}} \end{cases} \qquad (C)$$

dobbiamo ora ricavare $L_{12}$, $L_{23}$ e $L_{13}$, poniamo

$$\begin{aligned}
\Delta = L_1L_2 - M^2 &= \frac{L_{13}(L_{12}+L_{23})}{L_{12}+L_{23}+L_{13}}\frac{L_{23}(L_{12}+L_{13})}{L_{12}+L_{23}+L_{13}} - \frac{L^2{}_{13}L_{23}{}^2}{(L_{12}+L_{23}+L_{13})^2} \\
&= \frac{(L_{13}L_{12}+L_{13}L_{23})(L_{23}L_{12}+L_{23}L_{13})}{(L_{12}+L_{23}+L_{13})^2} - \frac{L^2{}_{13}L_{23}{}^2}{(L_{12}+L_{23}+L_{13})^2} \\
&= \frac{(L_{13}L_{12}L_{23}L_{12}+L_{13}L_{12}L_{23}L_{13}+L_{13}L_{23}L_{23}L_{12}+L_{13}L_{23}L_{23}L_{13}) - L^2{}_{13}L_{23}{}^2}{(L_{12}+L_{23}+L_{13})^2} \\
&= \frac{(L_{13}L_{23}L^2{}_{12}+L^2{}_{13}L_{23}L_{12}+L_{13}L^2{}_{23}L_{12}+L^2{}_{13}L^2{}_{23} - L^2{}_{13}L_{23}{}^2}{(L_{12}+L_{23}+L_{13})^2} \\
&= \frac{(L_{13}L_{23}L^2{}_{12}+L^2{}_{13}L_{23}L_{12}+L_{13}L^2{}_{23}L_{12})}{(L_{12}+L_{23}+L_{13})^2} = \frac{L_{12}(L_{13}L_{23}L_{12})+L_{13}(L_{13}L_{23}L_{12})+L_{23}(L_{13}L_{23}L_{12})}{(L_{12}+L_{23}+L_{13})^2} \\
&= \frac{(L_{13}L_{23}L_{12})(L_{12}+L_{23}+L_{13})}{(L_{12}+L_{23}+L_{13})^2} = \frac{L_{13}L_{23}L_{12}}{L_{12}+L_{23}+L_{13}}
\end{aligned}$$

da cui, infine, si ha

$$L_{12}+L_{23}+L_{13} = \frac{L_{13}L_{23}L_{12}}{\Delta}$$

e sostituendo quest'ultima espressione nelle equazioni del sistema (C) si ha

- prima equazione

$$L_1 = \frac{L_{13}(L_{12}+L_{23})}{L_{12}+L_{23}+L_{13}} = \frac{L_{13}L_{12}}{L_{12}+L_{23}+L_{13}} + \frac{L_{13}L_{23}}{L_{12}+L_{23}+L_{13}} = \frac{L_{13}L_{12}}{L_{12}+L_{23}+L_{13}} + M = \frac{L_{13}L_{12}\Delta}{L_{13}L_{23}L_{12}} + M = \frac{\Delta}{L_{23}} + M$$

quindi

$$L_1 - M = \frac{\Delta}{L_{23}} \Longrightarrow L_{23} = \frac{\Delta}{L_1 - M}$$

- seconda equazione

$$L_2 = \frac{L_{23}(L_{12}+L_{13})}{L_{12}+L_{23}+L_{13}} = \frac{L_{23}L_{12}}{L_{12}+L_{23}+L_{13}} + \frac{L_{23}L_{13}}{L_{12}+L_{23}+L_{13}} = \frac{L_{23}L_{12}}{L_{12}+L_{23}+L_{13}} + M = \frac{L_{23}L_{12}\Delta}{L_{13}L_{23}L_{12}} + M = \frac{\Delta}{L_{13}} + M$$

da cui

$$L_2 - M = \frac{\Delta}{L_{13}} + M \Longrightarrow L_{13} = \frac{\Delta}{L_2 - M}$$

- terza equazione

$$M = \frac{L_{13}L_{23}}{L_{12} + L_{23} + L_{13}} = \frac{L_{13}L_{23}\Delta}{L_{13}L_{23}L_{12}} = \frac{\Delta}{L_{12}}$$

perciò

$$L_{12} = \frac{\Delta}{M}$$

Infine riepilogando abbiamo ottenuto

$$\begin{cases} L_{12} = \dfrac{\Delta}{M} \\ L_{23} = \dfrac{\Delta}{L_1 - M} \\ L_{13} = \dfrac{\Delta}{L_2 - M} \end{cases}$$

ed il circuito equivalente di figura 4, diventa quello riportato in figura 5.

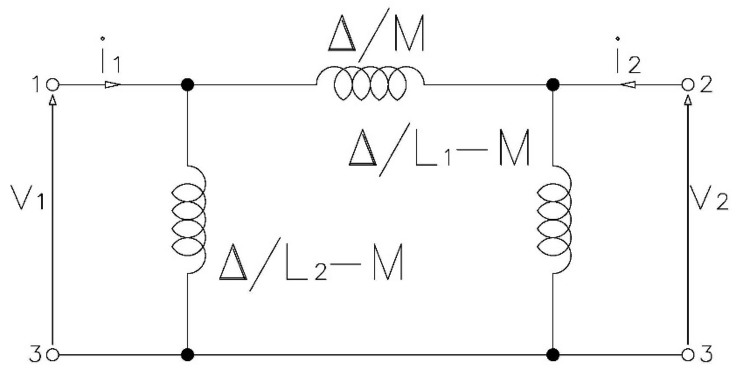


*Fig. 5*

***Sommario***