

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MESSINA  
*Dipartimento di Ingegneria*  
*Contrada Di Dio I, 98166 – Villaggio S. Agata Messina*

## ***Appunti Corso di Elettrotecnica***

***Circuito Magnetico - Coefficienti L ed M***

*Anno Accademico 2022-2023*

*prof. ing. Bruno Azzerboni*

**Fonti:**

[www.electroyou.it](http://www.electroyou.it)

<https://www.chimica-online.it/fisica/circuito-magnetico.htm>

<https://it.hobby.fai-da-te.narkive.com/>

<https://www.matematicamente.it/>

<https://www.iiscarducci.edu.it/>

**Circuito Magnetico e Coefficienti L ed M di Auto e Mutua Induzione**

Un circuito magnetico è un circuito (percorso chiuso) in cui si induce un campo magnetico per mezzo di opportuni avvolgimenti percorsi da corrente elettrica o per mezzo di uno o più magneti permanenti.

In figura 1 sono riportati due esempi di circuiti magnetici costituiti da due colonne (conduttori verticali) e da due gioghi (conduttori orizzontali), con un solo avvolgimento; essi si differenziano perché nel secondo circuito (Fig. 1B) è presente un tratto d'aria (traferro) di altezza  $l_t$ .

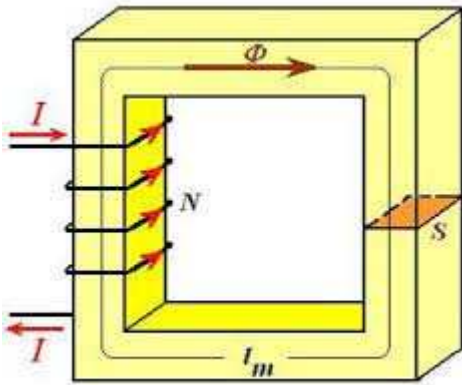


Fig. 1A

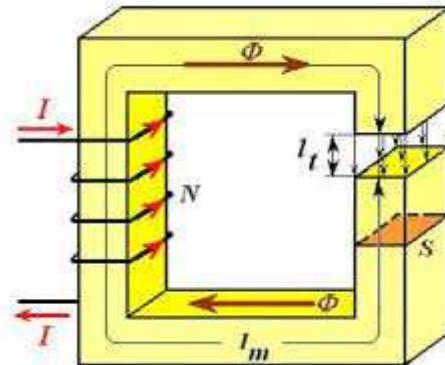


Fig. 1B

Iniettando corrente nell'avvolgimento si genera una forza magnetomotrice (f.m.m.)  $\mathcal{F}$ :

$$\mathcal{F} = NI$$

con

- $N$  numero di spire dell'avvolgimento
- $I$  corrente che circola nell'avvolgimento

Analogamente a quanto avviene per i circuiti elettrici la conseguenza dell'applicazione di una forza magnetomotrice  $NI$ , la cui unità di misura è AS (Ampere Spire), ad un circuito magnetico come quello mostrato in Fig.1, è la circolazione di un flusso magnetico  $\Phi_g$  che chiameremo flusso generato dalla f.m.m.

Il flusso  $\Phi_g$  che circola all'interno del circuito dipende sia dalla forza magnetomotrice, sia dalla riluttanza equivalente del circuito vista dall'avvolgimento.

La riluttanza  $\mathcal{R}$  è una grandezza caratteristica dei circuiti magnetici analoga alla resistenza elettrica dei circuiti elettrici che misura l'opposizione di un materiale al transito di un flusso magnetico; l'inverso di essa, analogo alla conduttanza elettrica, è chiamato permeanza.

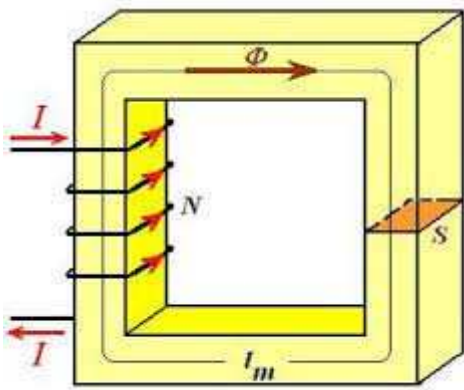
I materiali usati per questo tipo di circuiti, come già detto, sono ferromagnetici, e la riluttanza  $\mathcal{R}$  è legata al tipo di materiale tramite la relazione

$$\mathcal{R} = \frac{l_m}{\mu S}$$

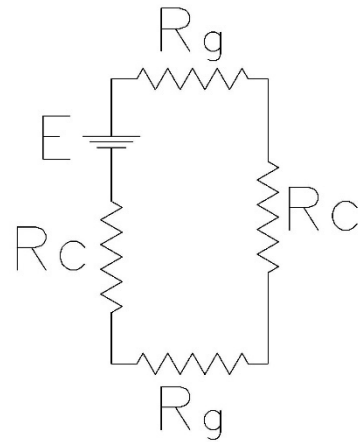
dove

- $l_m$  è la lunghezza media del nucleo,
- $\mu$  è la permeabilità magnetica assoluta del materiale utilizzato  
 $\mu = \mu_0 \mu_r$  con  $\mu_0$  permeabilità del vuoto e  $\mu_r$  permeabilità relativa del materiale utilizzato
- $S$  è la sezione del nucleo

Se invece di conoscere la lunghezza media del nucleo ( $l_m$ ), conoscessimo le lunghezze delle colonne ( $l_c$ ) e le lunghezze dei giochi ( $l_g$ ), allora la riluttanza equivalente vista dall'avvolgimento è, per la Fig. 1A:



Circuito Magnetico



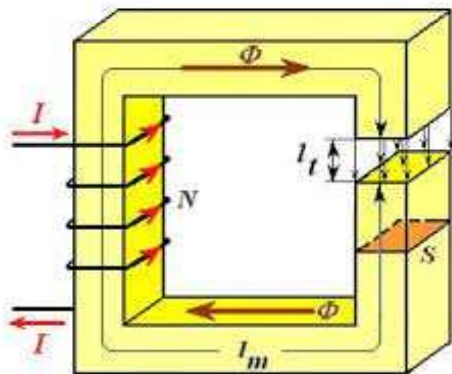
Circuito Elettrico Corrispondente

$$\mathcal{R}_{eq} = 2\mathcal{R}_c + 2\mathcal{R}_g$$

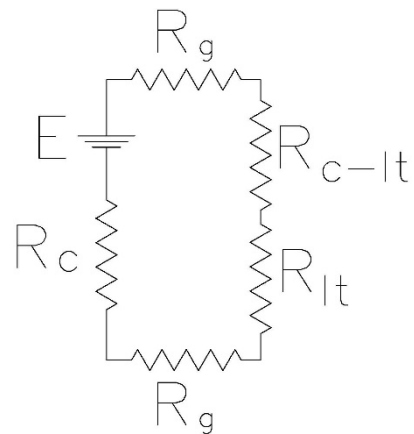
con:

$$\mathcal{R}_c = \frac{l_c}{\mu S} \quad \mathcal{R}_g = \frac{l_g}{\mu S}$$

Invece per la Fig. 1B, la riluttanza equivalente vista dall'avvolgimento è:



Circuito Magnetico



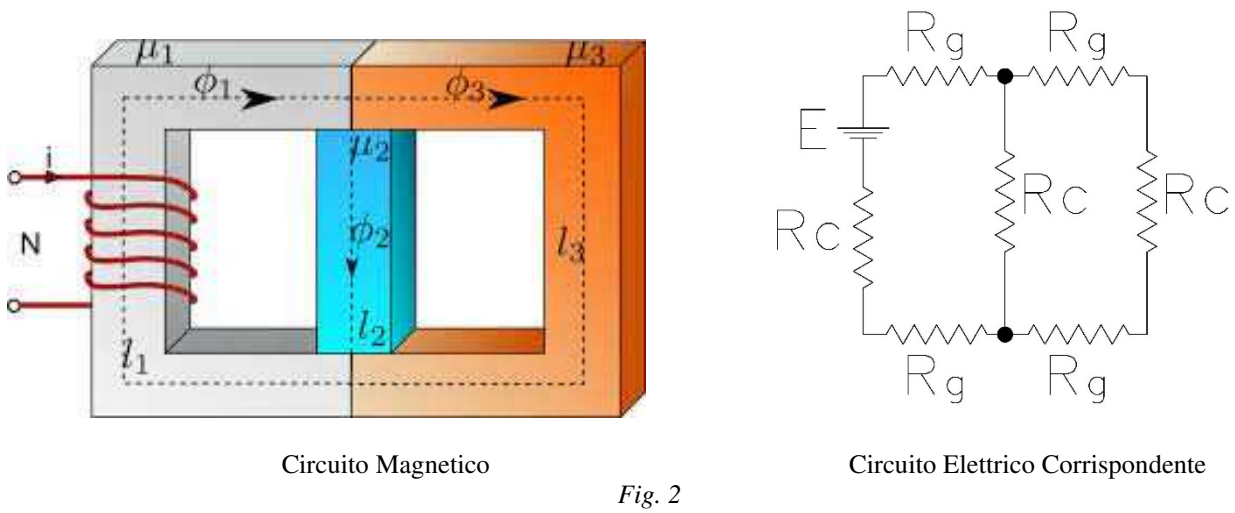
Circuito Elettrico Corrispondente

$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_c + \mathcal{R}_{l_t} + \mathcal{R}_{c-l_t} + 2\mathcal{R}_g$$

indicando con:

$$\mathcal{R}_g = \frac{l_g}{\mu S} \quad \mathcal{R}_c = \frac{l_c}{\mu S} \quad \mathcal{R}_{l_t} = \frac{l_{l_t}}{\mu_0 S} \quad \mathcal{R}_{c-l_t} = \frac{l_c - l_t}{\mu S}$$

Analizziamo ora il circuito magnetico a due finestre riportato in Fig. 2



La riluttanza equivalente vista dall'avvolgimento è:

$$\mathcal{R}_{eq} = [(2\mathcal{R}_g + \mathcal{R}_c) // \mathcal{R}_c] + (2\mathcal{R}_g + \mathcal{R}_c)$$

L'equivalente della legge di Ohm, vista per i circuiti elettrici, è per i circuiti magnetici la legge di Hopkinson che lega tra loro f.m.m., riluttanza e flusso. È quindi possibile fare analogie tra circuiti magnetici ed elettrici come suggerito dalla seguente tabella

Circuito	Causa	Effetto	Opposizione	
Elettrico	f.e.m. $V$	Corrente $I$	$R$	$V = RI$ Legge di Ohm
Magnetico	f.m.m. $\mathfrak{F}$	Flusso $\Phi_g$	$\mathcal{R}_{eq}$	$\mathfrak{F} = \mathcal{R}_{eq} \Phi_g$ Legge di Hopkinson

Quindi la riluttanza può essere anche definita definita come rapporto tra la forza magnetomotrice applicata a un circuito magnetico ed il flusso di induzione da essa generato che circola nel circuito. e si misura nel sistema SI in AS/Wb, equivalenti all'inverso dell'henry ( $H^{-1}$ ).

Dalla legge di Hopkinson segue che

$$\Phi_g = \frac{NI}{\mathcal{R}_{eq}}$$

questo rappresenta il flusso generato, cioè il flusso che circola all'interno del nucleo e, per determinare il senso del flusso, si adopera la regola della vite destrorsa: *il verso del movimento della vite, facendola girare concordemente al senso della corrente nell'avvolgimento, dà il verso del flusso.*

### Coefficiente di Autoinduzione – Induttanza ( $L$ )

Il flusso  $\Phi_g$  generato dall'avvolgimento, circolando nel nucleo, si concatena con tutte le spire dell'avvolgimento stesso, possiamo quindi definire il flusso totalmente concatenato con l'avvolgimento di  $N$  spire come:

$$\Phi_{\Sigma} = N\Phi_g = N \frac{NI}{\mathcal{R}_{eq}} = \frac{N^2 I}{\mathcal{R}_{eq}}$$

Definiamo *coefficiente di induzione* (c.i.) il rapporto tra il *flusso totalmente concatenato con l'avvolgimento*  $\Phi_{\Sigma}$  e la *corrente che lo genera*.

$$c. i. = \frac{\Phi_{\Sigma}}{I}$$

Nel nostro caso la stessa corrente  $I$  che fluisce nell'avvolgimento genera il flusso  $\Phi_g$ , quindi il flusso totalmente concatenato  $\Phi_{\Sigma}$  è generato dalla medesima corrente  $I$  e, di conseguenza, il nostro coefficiente di induzione è un coefficiente di autoinduzione che chiameremo *induttanza*  $L$ .

$$L = \frac{\Phi_{\Sigma}}{I} = \frac{N^2 I}{\mathcal{R}_{eq} I} = \frac{N^2}{\mathcal{R}_{eq}}$$

L'induttanza si misura in Henry [H].

### Coefficiente di Mutua Induzione – Mutua ( $M$ )

Consideriamo ora un nucleo sul quale siano avvolti due avvolgimenti rispettivamente di  $N_1$  e di  $N_2$  spire, Fig. 3

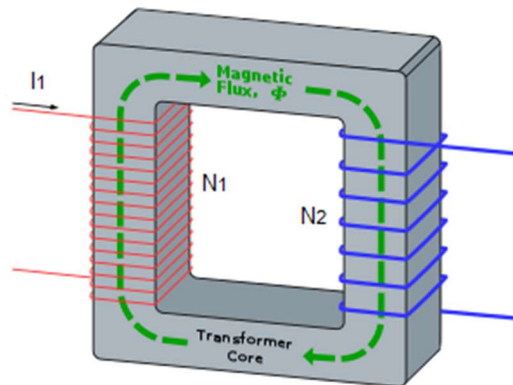


Fig. 3

L'avvolgimento di  $N_1$  spire percorso dalla corrente  $I_1$  genera un flusso  $\Phi_1$  dato da:

$$\Phi_1 = \frac{N_1 I_1}{\mathcal{R}_{eq1}}$$

dove

$$\mathcal{R}_{eq1} = 2\mathcal{R}_c + 2\mathcal{R}_g$$

È la riluttanza equivalente vista dall'avvolgimento 1.

Di conseguenza, come visto precedentemente, avremo una induttanza

$$L_1 = \frac{\Phi_{\Sigma 1}}{I_1} = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}_{eq1}}$$

Lo stesso flusso  $\Phi_1$ , circolando nel nucleo, si concatena totalmente con l'avvolgimento di  $N_2$  spire, avremo quindi che il flusso generato dall'avvolgimento 1 che si concatena totalmente con l'avvolgimento 2 è dato da:

$$\Phi_{\Sigma 12} = N_2 \Phi_1 = N_2 \frac{N_1 I_1}{\mathcal{R}_{eq1}} = \frac{N_1 N_2 I_1}{\mathcal{R}_{eq1}}$$

In questo caso la corrente  $I_1$  che fluisce nell'avvolgimento di  $N_1$  genera il flusso  $\Phi_1$ , quindi il flusso totalmente concatenato con l'avvolgimento di  $N_2$  spire,  $\Phi_{\Sigma 12}$ , è generato dalla corrente che circola nell'altro avvolgimento e, di conseguenza, il nostro coefficiente di induzione è un coefficiente di mutua induzione che chiameremo *mutua*  $M_{12}$ .

$$M_{12} = \frac{\Phi_{\Sigma 12}}{I_1} = \frac{N_1 N_2 I_1}{\mathcal{R}_{eq1} I_1} = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}_{eq1}}$$

Poiché, in questo caso, tutto il flusso generato dall'avvolgimento 1 si concatena totalmente con l'avvolgimento 2, diremo che questo è un *accoppiamento perfetto*.

Con riferimento ora alla Fig. 4A, notiamo che anche nell'avvolgimento 2 scorre ora una corrente  $I_2$

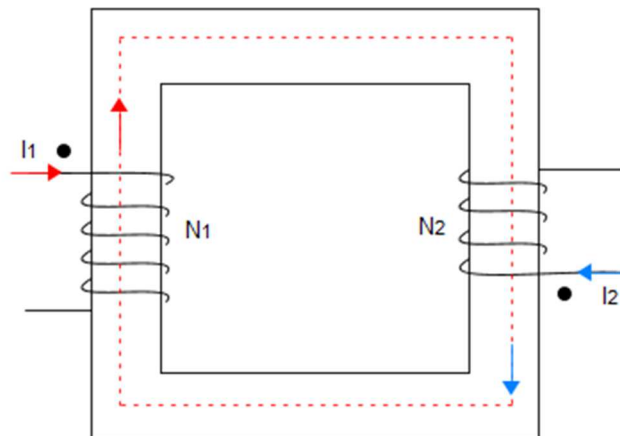


Fig. 4A

Avremo, quindi, una induttanza  $L_2$

$$L_2 = \frac{\Phi_{\Sigma 2}}{I_2} = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}_{eq2}}$$

Dove, chiaramente,

$$\mathcal{R}_{eq2} = \mathcal{R}_{eq1}$$

Anche la corrente  $I_2$  che fluisce nell'avvolgimento di  $N_2$  genera il flusso  $\Phi_2$ , quindi il flusso totalmente concatenato con l'avvolgimento di  $N_1$  spire,  $\Phi_{\Sigma 21}$ , è generato dalla corrente che circola nell'altro avvolgimento e, di conseguenza, il nostro coefficiente di induzione è un coefficiente di mutua induzione che chiameremo *mutua*  $M_{21}$ .

$$M_{21} = \frac{\Phi_{\Sigma 21}}{I_2} = \frac{N_1 N_2 I_2}{\mathcal{R}_{eq2} I_2} = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}_{eq2}}$$

Abbiamo quindi tre coefficienti di induzione:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\Phi_{\Sigma 1}}{I_1} = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}_{eq1}} \\ L_2 &= \frac{\Phi_{\Sigma 2}}{I_2} = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}_{eq2}} \\ M_{21} &= \frac{\Phi_{\Sigma 21}}{I_2} = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}_{eq2}} \end{aligned}$$

E poiché le riluttanze equivalenti viste dai due avvolgimenti sono uguali, possiamo affermare che

$$M_{12} = M_{21}$$

Questa relazione è sempre valida, vale cioè il teorema di reciprocità per cui, sempre,

$$M_{ij} = M_{ji}$$

Inoltre analizzando le formule delle induttanze e della mutua, possiamo affermare che:

$$M_{12} = M_{21} = \sqrt{L_1 L_2}$$

Il coefficiente di mutua induzione, però, può essere positivo o negativo, in particolare:

- *Il coefficiente di mutua induzione è positivo se il flusso di autoinduzione è concorde al flusso di mutua induzione;*
- *Il coefficiente di mutua induzione è negativo se il flusso di autoinduzione è discorde al flusso di mutua induzione.*

Nel caso della Fig. 4A il coefficiente di mutua è positivo, infatti se guardiamo dall'avvolgimento 1 il flusso di autoinduzione (freccia rossa) è concorde al flusso di mutua induzione (freccia blu); se invece guardiamo dall'avvolgimento 2 abbiamo che il flusso di autoinduzione (freccia blu) è concorde al flusso di mutua induzione (freccia rossa). Basta quindi esaminare la situazione da un solo avvolgimento coinvolto nell'accoppiamento per stabilire se quella mutua è positiva o negativa.

Avendo ora calcolato per il nucleo della Fig. 4A tutte le auto e tutte le mutue possiamo disegnare l'equivalente elettrico, Fig. 4B.

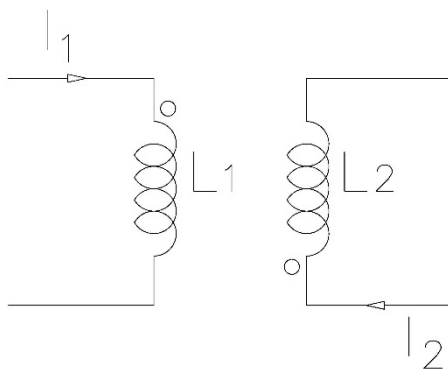


Fig. 4B

Come è evidente, per stabilire il segno della mutua occorre avere a disposizione il nucleo con tutti gli avvolgimenti in modo da stabilire, in base al senso di avvolgimento ed al verso della corrente, il verso del flusso generato da ogni avvolgimento.

Quando però passiamo all'equivalente elettrico, abbiamo solo dei simboli dai quali non è possibile rilevare il senso di avvolgimento e quindi non è possibile conoscere il verso dei flussi per stabilire se la mutua è o meno positiva.

Occorre quindi contrassegnare i morsetti dai quali entra la corrente affinché la mutua sia positiva.

Quindi nell'equivalente elettrico scegliamo ad arbitrio il verso delle correnti e, per convenzione, se entrambi le correnti entrano o escono dai morsetti contrassegnati la mutua sarà positiva, altrimenti se scegliessimo una corrente entrante nel morsetto contrassegnato e l'altra uscente dall'altro morsetto contrassegnato, la mutua sarà negativa.

In questo caso poiché alimentando l'avvolgimento 1 dall'alto e l'avvolgimento 2 dal basso in Fig. 4A la mutua è positiva, dobbiamo contrassegnare i morsetti così come fatto nella Fig. 4B. Avendo scelto in Fig. 4B entrambe le correnti entranti dai morsetti contrassegnati, la nostra mutua è positiva.

Affrontiamo ora il caso di accoppiamento mutuo non perfetto come nel caso di Fig. 5

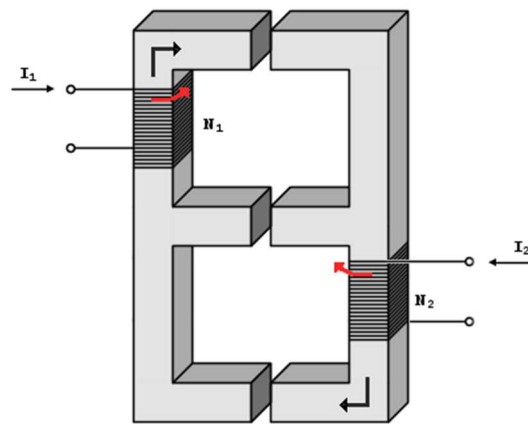


Fig. 5

Per calcolare  $L_1$ ,  $L_2$  ed  $M_{12}$  dobbiamo prima ricavare le riluttanze equivalenti viste dai due avvolgimenti che in questo caso, vista la simmetria del nucleo, saranno uguali. Per fare ciò ci appoggiamo sui circuiti equivalenti elettrici e analizzeremo separatamente i due avvolgimenti Fig. 5A e Fig. 5B

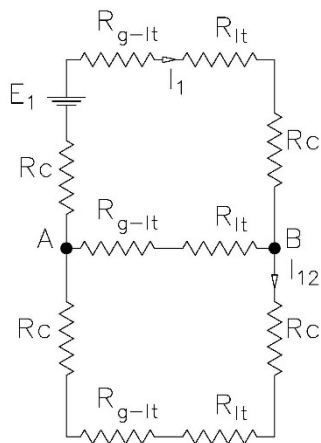


Fig. 5A

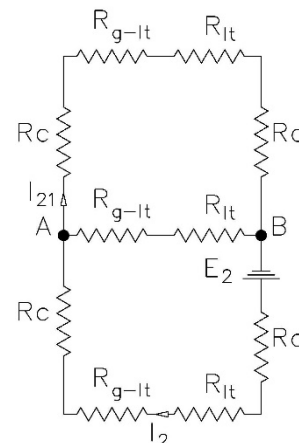


Fig. 5B

Le riluttanze equivalenti saranno quindi:

$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_{eq1} = \mathcal{R}_{eq2} = \left[ (2\mathcal{R}_c + \mathcal{R}_{g-lt} + \mathcal{R}_{lt}) // (\mathcal{R}_{g-lt} + \mathcal{R}_{lt}) \right] + (2\mathcal{R}_c + \mathcal{R}_{g-lt} + \mathcal{R}_{lt})$$



Per cui avremo:

$$L_1 = \frac{\Phi_{\Sigma 1}}{I_1} = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}_{eq}}$$

$$L_2 = \frac{\Phi_{\Sigma 2}}{I_2} = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}_{eq}}$$

In questo caso l'accoppiamento mutuo non è perfetto infatti non tutto il flusso generato dall'avvolgimento 1 va a concatenarsi con l'avvolgimento 2, analogamente se parliamo dell'avvolgimento 2. Dobbiamo quindi calcolare l'aliquota del flusso generato dall'avvolgimento 1,  $\Phi_{g1}$ , che va a concatenarsi con l'avvolgimento 2,  $\Phi_{12}$ .

Per fare ciò riferiamoci alla Fig. 5A dove:

$$I_1 \text{ rappresenta } \Phi_{g1}$$

$$I_{12} \text{ rappresenta } \Phi_{12}$$

La corrente  $I_{12}$  non è altro che la corrente derivata in un ramo di un parallelo costituito dai due resistori:

$$(2R_c + R_{g-lt} + R_{lt}) \text{ e } (R_{g-lt} + R_{lt})$$

Per cui, con la formula delle correnti derivate, abbiamo:

$$I_{12} = I_1 \frac{(R_{g-lt} + R_{lt})}{(R_{g-lt} + R_{lt}) + (2R_c + R_{g-lt} + R_{lt})}$$

Riportando il tutto al circuito magnetico (sostituiamo alle correnti i flussi ed alle resistenze le riluttanze), abbiamo

$$\Phi_{12} = \Phi_1 \frac{(\mathcal{R}_{g-lt} + \mathcal{R}_{lt})}{(\mathcal{R}_{g-lt} + \mathcal{R}_{lt}) + (2\mathcal{R}_c + \mathcal{R}_{g-lt} + \mathcal{R}_{lt})}$$

La frazione è una grandezza adimensionale che ci indica quale è l'aliquota del flusso  $\Phi_{g1}$  che va ad interessare l'avvolgimento 2 e che chiameremo *coefficiente di ripartizione del flusso*  $\alpha$ , in questo caso:

$$\alpha_{12} = \frac{(\mathcal{R}_{g-lt} + \mathcal{R}_{lt})}{(\mathcal{R}_{g-lt} + \mathcal{R}_{lt}) + (2\mathcal{R}_c + \mathcal{R}_{g-lt} + \mathcal{R}_{lt})}$$

da cui

$$\Phi_{12} = \Phi_{g1} \alpha_{12}$$

Quindi

$$\Phi_{\Sigma 12} = N_2 \Phi_{12} = N_2 \alpha_{12} \Phi_{g1} = \alpha_{12} N_2 \frac{N_1 I_1}{\mathcal{R}_{eq}}$$

Infine

$$M_{12} = \frac{\Phi_{\Sigma 12}}{I_1} = \alpha_{12} \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}_{eq}}$$

Poiché il flusso di auto  $\Phi_2$  è concorde al flusso di mutua  $\Phi_{12}$ , allora

$$M_{12} > 0$$

Di conseguenza il circuito elettrico è quello riportato in Fig. 5C:

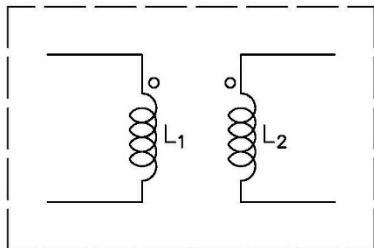


Fig. 5C

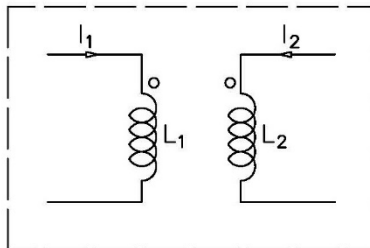


Fig. 5D

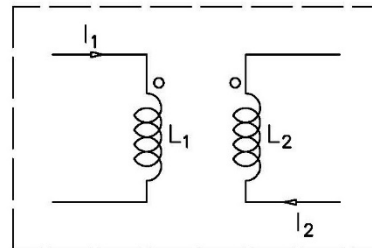


Fig. 5E

Se noi, arbitrariamente scegliessimo i versi delle correnti come in Fig. 5D allora  $M_{12} > 0$ , se invece scegliessimo come in Fig. 5E avremmo  $M_{12} < 0$ .

In conclusione abbiamo:

$$\begin{cases} L_1 = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}_{eq}} \\ L_2 = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}_{eq}} \\ M_{12} = \alpha_{12} \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}_{eq}} \end{cases}$$

Come si può notare, in questo caso di accoppiamento non perfetto, non vale la relazione:

$$M_{12} = M_{21} = \sqrt{L_1 L_2}$$

Ma, in generale vale la relazione:

$$M_{ij} = M_{ji} = k_{ij} \sqrt{L_i L_j}$$

Con  $k_{ij}$  detto *coefficiente di accoppiamento*; è evidente che per un accoppiamento perfetto  $k_{ij} = 1$ .

Una volta calcolati i coefficienti di auto e mutua, se ci interessasse conoscere il coefficiente di accoppiamento, basterà applicare la formula inversa:

$$k_{ij} = \frac{M_{ij}}{\sqrt{L_i L_j}}$$

### Forze elettromotrici indotte

Se in un avvolgimento o in una semplice spira abbiamo una variazione del flusso totalmente concatenato, allora nascerà nell'avvolgimento o nella spira una forza elettromotrice indotta che tende a generare una corrente che tende a generare un flusso che tende ad opporsi alla variazione del flusso totalmente concatenato che ha innescato il fenomeno.

In pratica ogni avvolgimento o semplice spira, tendono a mantenere costante il flusso con loro totalmente concatenato.

È evidente, quindi, che questa *f.e.m. indotta nasce se e solo se si ha una variazione del flusso totalmente concatenato* per cui la f.e.m. indotta dipende dalla derivata rispetto al tempo del flusso concatenato:

$$e = - \frac{d\Phi_{\Sigma}}{dt}$$

Il segno meno è conseguenza della legge di Lenz; in fisica, la legge di Lenz, formulata dal fisico russo Heinrich Friedrich Emil Lenz nel 1834, è una conseguenza della legge di conservazione dell'energia che determina la direzione della forza elettromotrice risultante dall'induzione elettromagnetica in un circuito elettrico. La legge stabilisce che la variazione temporale del flusso del campo magnetico attraverso l'area abbracciata da un circuito genera nel circuito una forza elettromotrice che contrasta la variazione.

La variazione del  $\Phi_{\Sigma}$  può aver luogo per due motivi:

- Variazione nel tempo del flusso inducente, per esempio a causa di una variazione nel tempo della corrente che lo genera;
- Spostamenti o deformazioni dell'avvolgimento o della spira

Nel primo caso le f.e.m. indotte si diranno di *tipo trasformatore*, mentre nel secondo caso di *tipo mozionale*.

### Forza elettromotrice di tipo mozionale

Immaginiamo di avere una spira immersa in un campo magnetico (campo inducente) costante ed uniforme come in Fig. 6A, se la spira fosse fissa allora il  $\Phi_{\Sigma}$  sarebbe costante e la f.e.m. indotta sarebbe nulla.

Se la spira potesse muoversi avremmo:

- |                           |                                    |            |
|---------------------------|------------------------------------|------------|
| ➤ Spostamento orizzontale | $\Phi_{\Sigma} = \text{costante}$  | $e = 0$    |
| ➤ Spostamenti verticale   | $\Phi_{\Sigma} = \text{costante}$  | $e = 0$    |
| ➤ Rotazione               | $\Phi_{\Sigma} = \text{variabile}$ | $e \neq 0$ |

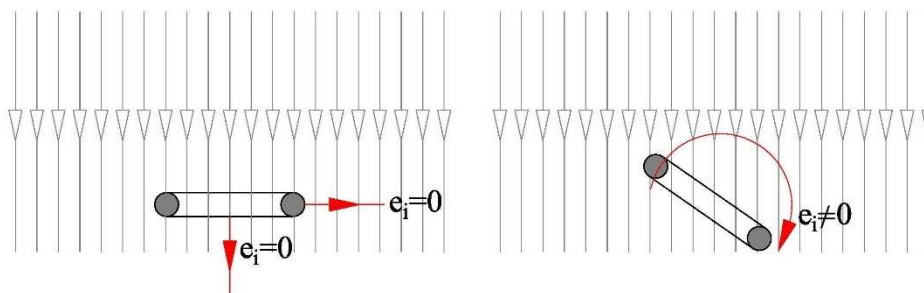


Fig. 6A

Se, invece, il campo magnetico fosse costante e non uniforme come in Fig. 6B, se la spira fosse fissa allora il  $\Phi_{\Sigma}$  sarebbe costante e la f.e.m. indotta sarebbe nulla.

Se la spira potesse muoversi avremmo:

- |                           |                                    |            |
|---------------------------|------------------------------------|------------|
| ➤ Spostamento orizzontale | $\Phi_{\Sigma} = \text{variabile}$ | $e \neq 0$ |
| ➤ Spostamenti verticale   | $\Phi_{\Sigma} = \text{costante}$  | $e = 0$    |
| ➤ Rotazione               | $\Phi_{\Sigma} = \text{variabile}$ | $e \neq 0$ |

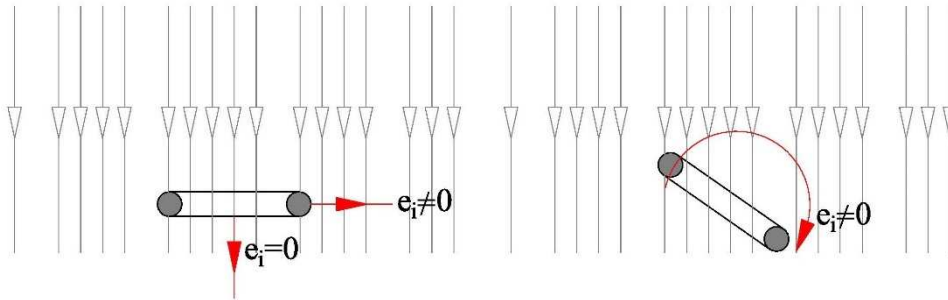


Fig. 6B

In tutti i casi visti, è chiaro che se la spira potesse deformarsi (allargarsi o stringersi), allora avremmo sempre

$$\Phi_{\Sigma} = \text{variabile} \quad e \neq 0$$

Analizziamo ora un altro tipo di f.e.m. indotta di tipo mozionale, Fig. 7

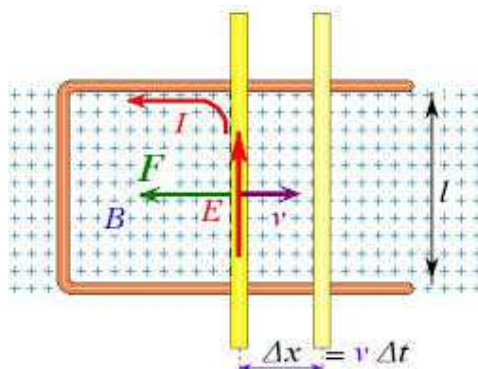


Fig. 7

In un campo magnetico  $B$  uniforme perpendicolare al piano del disegno è immerso un circuito elettrico costituito da una rotaia a forma di U (rossa) indefinitamente estesa di materiale conduttore e un conduttore verticale (giallo) libero di traslare in direzione orizzontale, con velocità costante, con attrito trascurabile e due contatti speciali (spazzole) consentono di mantenere il conduttore in movimento in contatto con la rotaia.

Applicando la regola della mano destra si trova allora facilmente che la f.e.m. indotta  $e$  ( $E$  in figura) è diretta come in figura.

Calcoliamo ora la f.e.m. indotta

$$\Phi_{\Sigma} = BS \quad S = l\Delta x$$

La f.e.m. indotta, tralasciando i segni, è

$$e = \frac{d\Phi_{\Sigma}}{dt}$$

Da cui

$$e = \frac{d(Bl\Delta x)}{dt}$$

Essendo

$$v = \frac{d\Delta x}{dt}$$

avremo

$$e = Blv$$

### **Forza elettromotrice di tipo trasformatore**

È chiaro che se la spira fosse immersa in un campo magnetico (campo inducente) variabile nel tempo, allora avremmo sempre:

$$\triangleright \Phi_{\Sigma} = \text{variabile} \quad e \neq 0$$

Inoltre, una volta definita

$$e_L = -\frac{d\Phi_{\Sigma}}{dt}$$

Assumiamo che  $e_L$  è positiva quando agisce sempre concordemente alla corrente che attraversa l'avvolgimento.

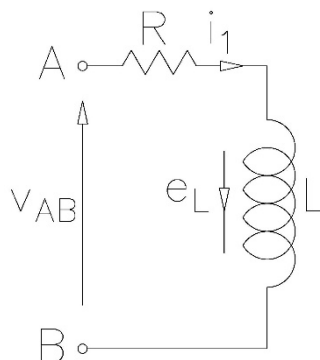


Fig. 8

Con riferimento alla Fig. 8, scriviamo la legge alla maglia fissando come senso di percorrenza il verso concorde alla corrente, quindi

$$v_{AB} + e_L = Ri$$

Ma

$$e_L = -\frac{d\Phi_{\Sigma}}{dt} = -\frac{dLi}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

In definitiva

$$v_{AB} - L\frac{di}{dt} = Ri$$

Riferiamoci ora alle Fig. 9A e 9B, come già detto per le f.e.m. indotte di autoinduzione, anche per quelle di mutua induzione dobbiamo rammentare che esse sono positive quando agiscono concordemente alla corrente che percorre l'avvolgimento.

Notiamo che, in base alla nostra libera scelta del verso delle correnti, nella Fig.9A la mutua è positiva, invece nella Fig. 9B la stessa è negativa.

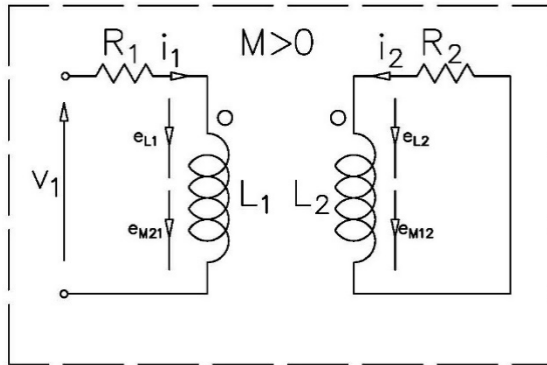


Fig. 9A

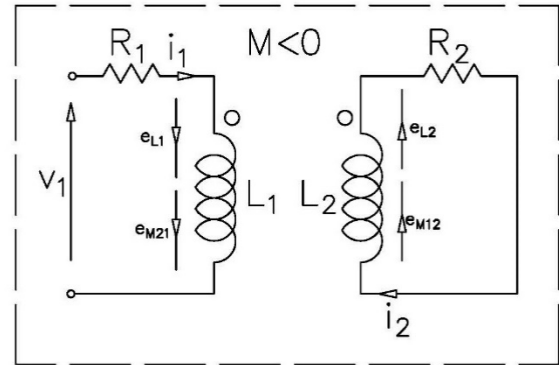


Fig. 9B

Scriviamo ora le equazioni alle maglie per i circuiti di Fig. 9A scegliendo il senso di percorrenza delle maglie concorde al verso delle correnti:

$$\begin{cases} v_1 + e_{L1} + e_{M21} = R_1 i_1 \\ e_{L2} + e_{M12} = R_2 i_2 \end{cases}$$

Sappiamo anche che  $M_{12} = M_{21} = M$  e che

$$\begin{aligned} e_{L1} &= -L_1 \frac{di_1}{dt}; & e_{M21} &= -M \frac{di_2}{dt} \\ e_{L2} &= -L_2 \frac{di_2}{dt}; & e_{M12} &= -M \frac{di_1}{dt} \end{aligned}$$

Per cui avremo:

$$\begin{cases} v_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = R_1 i_1 \\ -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = R_2 i_2 \end{cases}$$

Ed essendo  $M > 0$  non dobbiamo cambiare il segno della mutua.

Scriviamo ora le equazioni alle maglie per i circuiti di Fig. 9B scegliendo il senso di percorrenza delle maglie concorde al verso delle correnti:

$$\begin{cases} v_1 + e_{L1} + e_{M21} = R_1 i_1 \\ e_{L2} + e_{M12} = R_2 i_2 \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{cases} v_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = R_1 i_1 \\ -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = R_2 i_2 \end{cases}$$

Ed essendo in questo caso  $M < 0$  dobbiamo cambiare il segno della mutua, in definitiva avremo:

$$\begin{cases} v_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = R_1 i_1 \\ -L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = R_2 i_2 \end{cases}$$

Abbiamo visto che avendo un nucleo con due avvolgimenti dobbiamo calcolare due coefficienti di autoinduzione ed uno di mutua induzione, ma se avessimo un nucleo con “n” avvolgimenti, quanti coefficienti dovremmo calcolare?

Introduciamo allora la matrice dei coefficienti di mutua induzione, ipotizzando un nucleo con quattro avvolgimenti:

$$\begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{vmatrix}$$

È chiaro che i coefficienti sulla diagonale principale non son altro che i coefficienti di autoinduzione, per cui la matrice diventa:

$$\begin{vmatrix} L_1 & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & L_2 & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & L_3 & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & L_4 \end{vmatrix}$$

Ricordando ora il teorema di reciprocità  $M_{ij} = M_{ji}$  ci accorgiamo che la matrice è simmetrica, quindi, dopo aver calcolato le induttanze, dobbiamo calcolare solo metà dei coefficienti di mutua presenti nella matrice.

In definitiva, se la matrice fosse di ordine “n”, dovremo calcolare “n” coefficienti di autoinduzione e

$$\frac{n^2 - n}{2}$$

coefficienti di mutua.

### Energia immagazzinata in $L$ ed in $M$

Riferiamoci ora alla Fig. 10,

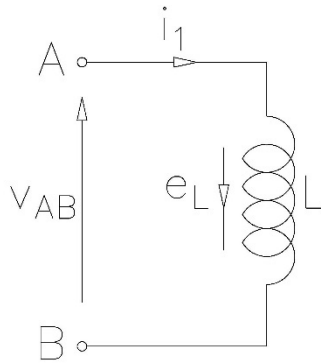


Fig. 10

ricordando che la potenza che transita nella sezione AB, potenza che interessa  $L$ , non è altro che il prodotto tra la tensione ai morsetti e la corrente che circola attraverso la sezione, avremo:

$$p_{AB} = v_{AB} i_1$$

Ma:

$$v_{AB} + e_L = 0$$

Sostituendo l'espressione di  $e_L$ :

$$v_{AB} - L \frac{di_1}{dt} = 0$$

Da cui:

$$v_{AB} = L \frac{di_1}{dt}$$

Quindi per la potenza avremo:

$$p_{AB} = L \frac{di_1}{dt} i_1$$

Sappiamo, inoltre, che l'energia  $w_{AB}$  è data da:

$$w_{AB} = \int p_{AB} dt = \int L \frac{di_1}{dt} i_1 dt = \frac{1}{2} L i_1^2$$

Questa relazione, poiché ci dà l'energia immagazzinata in  $L$ , ci dice che l'induttanza è inerziale rispetto alla corrente proprio perché l'energia immagazzinata dipende dalla corrente. L'induttanza quindi non permetterà variazioni finite della corrente in tempo zero.



Riferiamoci ora alle Fig. 11A e 11B

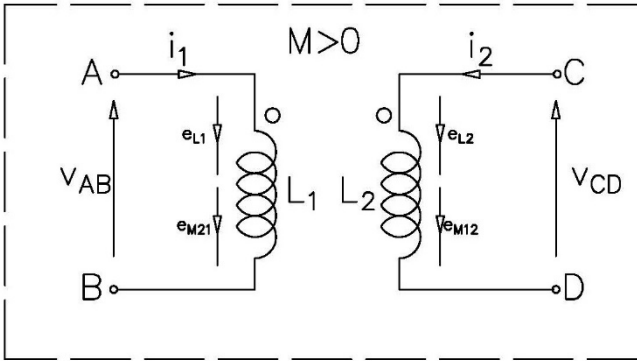


Fig. 11A

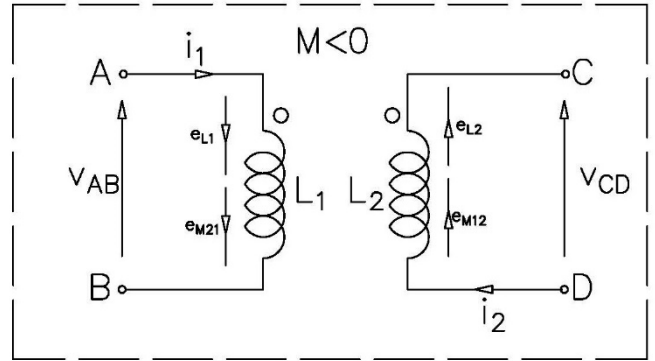


Fig. 11B

Calcoliamo anche qui la potenza nella sezione AB, potenza che interessa  $L_1$

$$p_{AB} = v_{AB} i_1$$

$$v_{AB} + e_{L1} + e_{M21} = 0$$

$$v_{AB} - L_1 \frac{di_1}{dt} - M_{21} \frac{di_2}{dt} = 0$$

$$v_{AB} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{21} \frac{di_2}{dt}$$

$$p_{AB} = L_1 \frac{di_1}{dt} i_1 + M_{21} \frac{di_2}{dt} i_1$$

$$w_{AB} = \int p_{AB} dt = \int L_1 \frac{di_1}{dt} i_1 dt + \int M_{21} \frac{di_2}{dt} i_1 dt = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M_{12} i_1 i_2$$

Se invece calcolassimo la potenza nella sezione CD, potenza che interessa  $L_2$ , avremmo:

$$p_{CD} = v_{CD} i_2$$

$$v_{CD} + e_{L2} + e_{M12} = 0$$

$$v_{CD} - L_2 \frac{di_2}{dt} - M_{12} \frac{di_1}{dt} = 0$$

$$v_{CD} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{12} \frac{di_1}{dt}$$

$$p_{CD} = L_2 \frac{di_2}{dt} i_2 + M_{12} \frac{di_1}{dt} i_2$$

$$w_{CD} = \int p_{CD} dt = \int L_2 \frac{di_2}{dt} i_2 dt + \int M_{12} \frac{di_1}{dt} i_2 dt = \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M_{12} i_1 i_2$$

Se volessimo l'energia complessiva immagazzinata nell'accoppiamento, potremo agire così:

$$p_{tot} = p_{AB} + p_{CD} = L_1 \frac{di_1}{dt} i_1 + M_{21} \frac{di_2}{dt} i_1 + L_2 \frac{di_2}{dt} i_2 + M_{12} \frac{di_1}{dt} i_2$$

Ma l'espressione al secondo membro è un differenziale esatto, infatti tenendo presente che  $M_{12} = M_{21} = M$ , abbiamo:

$$p_{tot} = L_1 \frac{di_1}{dt} i_1 + M \frac{di_2}{dt} i_1 + L_2 \frac{di_2}{dt} i_2 + M \frac{di_1}{dt} i_2 = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right)$$

Per cui

$$w_{tot} = \int p_{tot} dt = \int \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) dt = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$$

La differenza tra le figure 11A e 11B è solo nel segno della mutua, quindi se ci fossimo riferiti alla Fig. 11B saremmo arrivati alla formula:

$$w_{tot} = \int p_{tot} dt = \int \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 - M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) dt = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 - M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$$

In conclusione, l'energia magnetica immagazzinata in un accoppiamento mutuo è:

$$w_{tot} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \pm M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$$

A seconda che la mutua sia positiva o negativa.

### Carica e scarica di $L$

Abbiamo visto che un induttore  $L$  immagazzina una energia pari a:

$$w_L = \frac{1}{2} Li^2$$

Ipotizziamo di avere un induttore inizialmente scarico  $w_L = 0$  ed esaminiamo la Fig. 12 nella quale, con il tasto T nella posizione di figura, la corrente che fluisce è nulla. Spostando T nella posizione 1 (Fig. 12A) nel circuito comincerà a fluire una corrente che varierà nel tempo poiché, come sappiamo, l'induttore è inerziale rispetto alla propria corrente e, quindi, quest'ultima non arriverà istantaneamente a regime permanente.

Alla fine del fenomeno quindi, l'induttanza avrà immagazzinato una certa energia  $w_L$ ; definiamo ora *transitorio* l'intervallo di tempo che necessita ad un sistema per passare da uno stato energetico iniziale ad uno stato energetico finale.

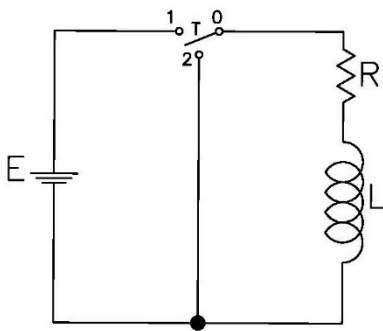


Fig. 12

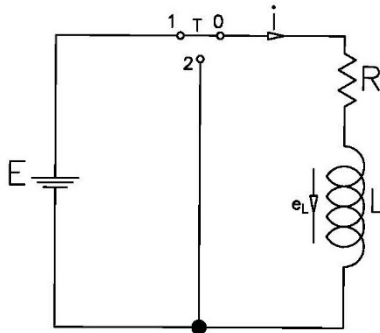


Fig. 12A

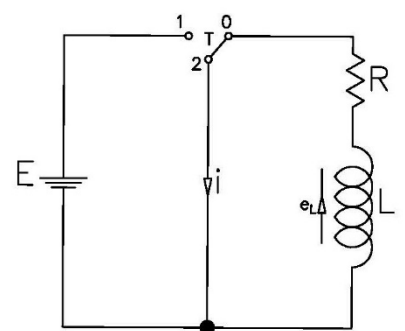


Fig. 12B

Fissato il senso di percorrenza della maglia di Fig. 12A concorde alla corrente, scriveremo:

$$E + e_L = Ri$$

Quindi

$$E - L \frac{di}{dt} = Ri$$

Questa è una equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili e, per risolverla, ci occorre la condizione iniziale della corrente che, ovviamente, è:

$$i(0) = 0$$

La soluzione dell'equazione è:

$$i = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

Alla fine del transitorio (*transitorio di carica*) cioè per  $t \rightarrow \infty$  avremo:

$$i = \frac{E}{R}$$

Se lasciamo il tutto inalterato siamo in condizione di regime permanente e la corrente sarà  $i = \frac{E}{R}$  finché non altereremo il sistema.

Spostiamo ora il tasto T in posizione 2 (Fig. 12B) e scriviamo l'equazione alla maglia scegliendo il senso di percorrenza concorde al verso della corrente:

$$e_L = Ri$$

Quindi

$$-L \frac{di}{dt} = Ri$$

Questa è una equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili e, per risolverla, ci occorre la condizione iniziale della corrente che, ovviamente, ora è:

$$i(0) = \frac{E}{R}$$

La soluzione dell'equazione è:

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

Alla fine del transitorio (*transitorio di scarica*) cioè per  $t \rightarrow \infty$  avremo:

$$i = 0$$

L'andamento della corrente durante il transitorio di carica, il regime permanente ed il transitorio di scarica è riportato in Fig. 13.

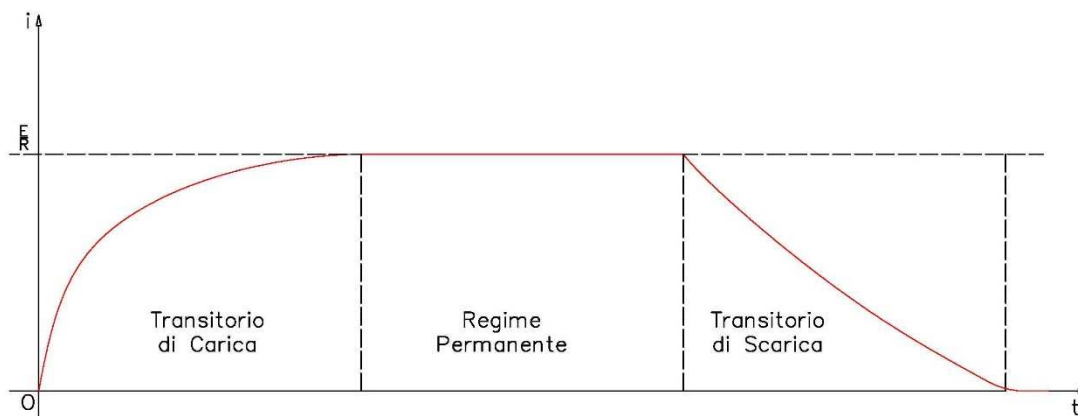


Fig. 13

Nelle espressioni della corrente durante i transitori, il rapporto  $\frac{L}{R}$  si dice *costante di tempo*, si indica con:

$$\tau = \frac{L}{R}$$

e si misura in sec., infatti

$$R \rightarrow [\Omega] = \left[ \frac{V}{A} \right]$$

Dalla definizione

$$e = L \frac{di}{dt}$$

abbiamo

$$L = e \frac{dt}{di}$$

cioè

$$[H] = [V] \left[ \frac{sec}{A} \right]$$

Per cui

$$\tau = \frac{L}{R} = \left[ \frac{A}{V} V \frac{sec}{A} \right] = [sec]$$

In definitiva, le espressioni istantanee delle correnti transitorie sono:

$$i = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad \text{corrente di carica}$$
$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{corrente di scarica}$$

Notiamo che a regime permanente la corrente vale:

$$i = \frac{E}{R}$$

E quindi possiamo affermare che a regime permanente continuo, l'induttore si comporta come un corto circuito, essendo infatti la corrente costante, la f.e.m. indotta sarà nulla e quindi è come se l'induttore non ci fosse.

Finora abbiamo studiato il transitorio di carica partendo da condizione iniziale nulla, se invece avessimo una condizione iniziale diversa da zero e cioè:

$$i(0) \neq 0$$

La soluzione sarebbe:

$$i = i(0)e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

## *Sommario*

Circuito Magnetico e Coefficienti L ed M di Auto e Mutua Induzione	2
Coefficiente di Autoinduzione – Induttanza (L)	5
Coefficiente di Mutua Induzione – Mutua (M)	5
Forze elettromotrici indotte	11
Forza elettromotrice di tipo mozionale	11
Forza elettromotrice di tipo trasformatore	13
Energia immagazzinata in L ed in M	16
Carica e scarica di L	19
Sommario	22