UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MESSINA
Dipartimento di Ingegneria
Contrada Di Dio I, 98166 – Villaggio S. Agata Messina

Appunti Corso di Elettrotecnica

Energia e potenza nei circuiti monofase in regime sinusoidale

Anno Accademico 2016-2017

prof. ing. Bruno Azzerboni

Fonti:
Lezioni di Elettrotecnica Generale - *Giulio Battistini*
Colombo Cursi Pisa

Energia e potenza nei circuiti monofase in regime sinusoidale

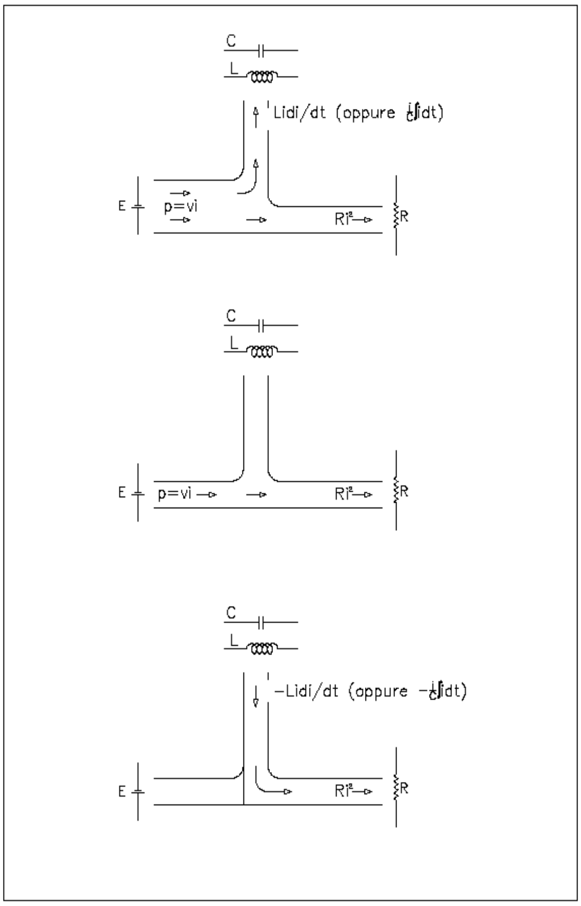
1. Analisi degli scambi di energia nel circuito

I fenomeni energetici connessi al passaggio della corrente in un circuito, possono essere distinti in due categorie:

- ***Fenomeni conservativi***: sono quelli connessi con la generazione dei campi elettrici e magnetici nello spazio attorno al circuito, essi assorbono e accumulano energia durante il periodo in cui si formano e aumentano d'intensità; la conservano fino a che si mantengono costanti e la restituiscono al circuito integralmente durante il periodo in cui diminuiscono d'intensità e si estinguono.
- ***Fenomeni dissipativi***: sono quelli mediante i quali l'energia elettrica è trasformata in altra forma e abbandona definitivamente il circuito.

Il regime energetico del circuito è determinato, istante per istante, dalla combinazione degli effetti prodotti sia dai fenomeni conservativi, sia da quelli dissipativi dell'energia.

Nei ***circuiti a corrente continua*** i fenomeni conservativi partecipano agli scambi di energia solo nei *periodi transitori* durante i quali avviene un mutamento nel regime elettrico del circuito; nel *funzionamento a regime costante*, essi non esercitano alcuna influenza né sul regime elettrico, né sul regime energetico del circuito (fig. 1).



a-Periodo di formazione dei campi
Corrisponde al transitorio di chiusura per i circuiti con L ed al transitorio di carica per i circuiti con C.

Il generatore eroga contemporaneamente la potenza assorbita dai campi (fenomeno conservativo) e quella assorbita dalla resistenza (fenomeno dissipativo).

b-Periodo di permanenza a regime dei campi.
Corrisponde al funzionamento a regime del circuito; cioè i=cost. In particolare per i circuiti con C in serie si ha i=0, p=0, $Ri^2=0$.

Il generatore eroga la potenza dissipata dalla resistenza; i fenomeni conservativi non intervengono negli scambi di energia.

c-Periodo di estinzione dei campi.
Corrisponde al transitorio di apertura per i circuiti con L ed al transitorio di scarica per i circuiti con C.

Il generatore, escluso dal circuito, non partecipa agli scambi energetici. La potenza dissipata dalla resistenza (fenomeno dissipativo) è fornita a spese dell'energia immagazzinata in precedenza nei campi (fenomeno conservativo).

Figura 1 Gli scambi di energia in un circuito a corrente continua.
I fenomeni conservativi partecipano agli scambi di energia solo nei periodi transitori.
A regime, essi non esercitano alcuna influenza né sul regime elettrico, né sul regime energetico del circuito.

Nei ***circuiti a corrente alternata***, invece, i campi generati dal circuito sono in continua variazione anche nel funzionamento a regime; perciò *reagiscono continuamente* con il circuito stesso che li genera e danno luogo a uno scambio permanente di energia con esso, condizionandone, istante per istante, il regime elettrico ed energetico.

Consideriamo un circuito R, L C in serie, l'equazione dell'equilibrio elettrico è:

$$v = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt$$

Moltiplicando per i, otteniamo:

$$vi = Ri^2 + Li\frac{di}{dt} + \frac{i}{C}\int idt$$

Il primo termine (p=vi) è la potenza erogata, istante per istante, dal generatore al circuito. Questo è positivo negli intervalli di tempo durante i quali v ed i hanno lo stesso segno e corrisponde, in tal caso, ad una potenza che dal generatore fluisce nel circuito; è negativo invece quando v ed i sono di segno opposto e corrisponde allora ad una potenza che dal circuito rifluisce nel generatore.

Il secondo termine (p_a=Ri2) rappresenta l'effetto dei fenomeni dissipativi dell'energia e corrisponde alla potenza trasformata in calore in R. Questo termine varia in grandezza al variare di i, ma conserva sempre lo stesso segno perché i è al quadrato; esso rappresenta infatti una energia costantemente diretta in ogni istante nel senso di affluire alla resistenza R.

La somma degli ultimi due termini (p_r=Li di/dt+i/C ∫idt) rappresenta l'effetto dei fenomeni conservativi dell'energia e corrisponde alla potenza scambiata dal circuito con i campi elettrico e magnetico generati nello spazio attorno ad esso. Questa potenza varia, istante per istante, in grandezza e segno e corrisponde a un'energia passante dal circuito allo spazio e immagazzinata nei campi, negli intervalli di tempo durante i quali il suo segno è positivo; corrisponde invece ad una energia complessivamente restituita dai campi al circuito, negli intervalli di tempo durante i quali il suo segno è negativo.

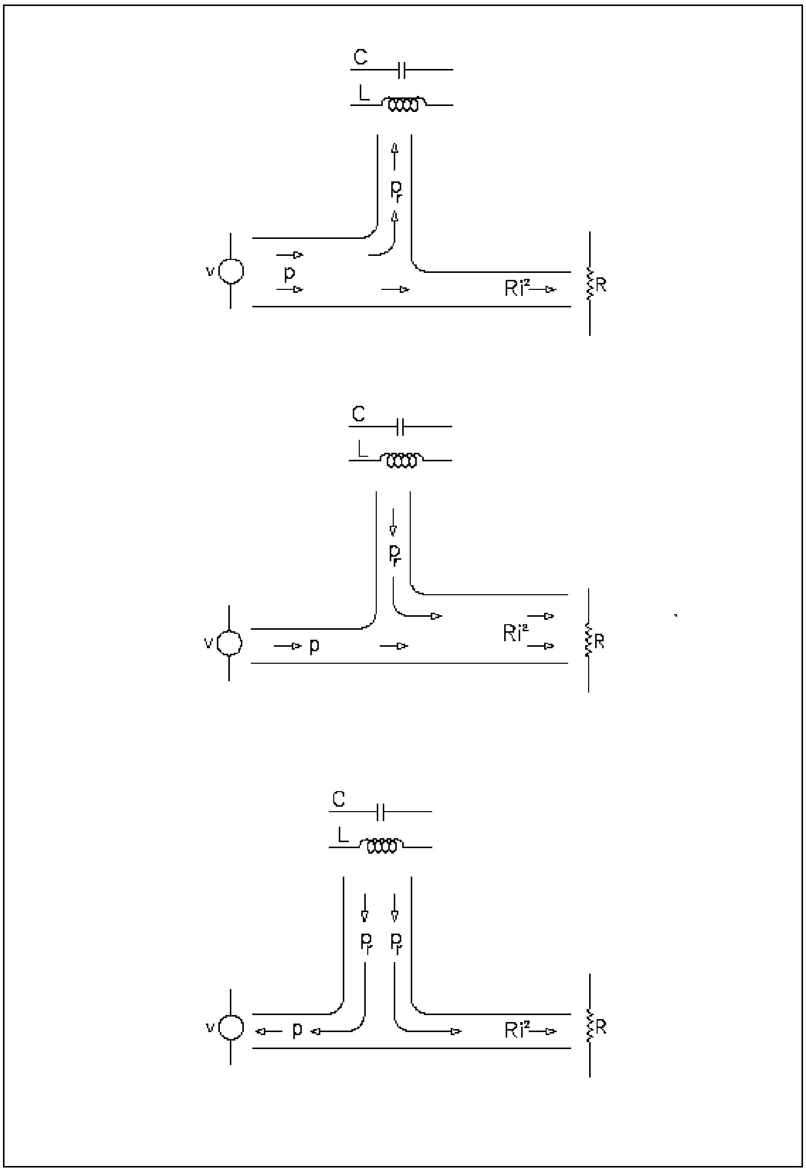
Se ora analizziamo l'interscambio di energia, istante per istante, si vede che esso assume aspetti diversi, nel corso del periodo, a seconda del segno di p e p_r.

- Negli intervalli in cui *p e p_r sono positive*, il generatore cede al circuito l'energia che in parte è dissipata nella resistenza R e in parte è immagazzinata nei campi generati nello spazio circostante il circuito (fig. 2a).

- Negli intervalli in cui *p è positiva e p_r è negativa*, l'energia dissipata in R è fornita in parte dal generatore e in parte a spese dell'energia accumulata nei campi attorno al circuito (fig. 2b).

- Negli intervalli, infine, in cui *sia p sia p_r sono negative*, l'energia restituita dai campi al circuito, in parte viene dissipata in R ed in parte rifluisce nel generatore (fig. 2c).

- Negli istanti particolari in cui *p=0, oppure p_r=0*, gli scambi di energia hanno luogo rispettivamente secondo gli schemi b e c della figura 1.



a- ***$p>0$*** ***$p_r>0$***

Il generatore eroga al circuito l'energia che va in parte dissipata in calore in R ed in parte è immagazzinata nei campi prodotti nello spazio circostante.

b- ***$p>0$*** ***$p_r<0$***

L'energia dissipata in calore in R è fornita in parte dal generatore e in parte dai campi intorno al circuito.

c- ***$p<0$*** ***$p_r<0$***

L'energia restituita dai campi, in parte sopperisce alle perdite per effetto Joule nella resistenza ed in parte rifluisce nel generatore.

Figura 2 Gli scambi di energia in un circuito a corrente alternata durante il periodo.

Il bilancio energetico del circuito è espresso ad ogni istante dall'equazione:

$$pdt = Ri^2dt + dw_{LC}$$

Ri^2dt *è sempre positivo e rappresenta una energia che in ogni istante affluisce sempre alla resistenza R.*

pdt *e* dw_{LC} *possono invece essere positivi o negativi e quindi l'interscambio dell'energia nel sistema assume, nel corso di uno stesso periodo, i vari aspetti descritti nella figura.*

2. *Il bilancio energetico del circuito in regime sinusoidale*

Nei circuiti in regime sinusoidale, gli scambi di energia hanno aspetti caratteristici di particolare interesse per il modo con cui i fenomeni conservativi dell'energia concorrono, istante per istante, alla determinazione del regime energetico del sistema.
È interessante, perciò, esaminare le modalità con le quali l'energia si accumula nei campi intorno al circuito ed analizzarne i trasferimenti che si hanno durante il periodo.

Esaminiamo, quindi, l'energia istantanea contenuta nei singoli campi e determiniamone la legge di variazione nel tempo.

Consideriamo un circuito R, L e C serie alimentato da una tensione sinusoidale, avremo:

$$v = V_M \sin(\omega t + \varphi)$$
$$i = I_M \sin \omega t$$

L'energia contenuta nel campo magnetico dell'induttanza L e nel campo elettrico della capacità C, è espressa in termini istantanei dalle formule:

$$w_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}LI_M^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2}LI_M^2 \frac{1}{2}(1-\cos 2\omega t) = \frac{1}{2}LI^2(1-\cos 2\omega t) = \frac{1}{2}\frac{X_L}{\omega}I^2(1-\cos 2\omega t)$$

Rammentando che $v_c = V_{CM} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$, il condensatore è inerziale rispetto alla tensione ai suoi morsetti, otteniamo:

$$w_C = \frac{1}{2}Cv_C^2 = \frac{1}{2}CV_{CM}^2 \sin^2\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}CV_{CM}^2 \frac{1}{2}\left[1-\cos(2\omega t - \pi)^{(*)}\right] = \frac{1}{2}CV_C^2(1+\cos 2\omega t)$$
$$= \frac{1}{2}C\frac{I^2}{\omega^2 C^2}(1+\cos 2\omega t) = \frac{1}{2}\frac{X_C}{\omega}I^2(1+\cos 2\omega t)$$

(*) $\cos(2\omega t - \pi) = \cos 2\omega t \cos\pi + \sin 2\omega t \sin\pi = -\cos 2\omega t$

La legge di variazione nel tempo, dell'energia contenuta singolarmente, istante per istante, nel campo elettrico e nel campo magnetico generati nello spazio attorno al circuito, rivela che quando l'energia dell'uno aumenta, l'energia dell'altro diminuisce e viceversa. Vale a dire, *ognuno dei due campi, nella fase in cui va formandosi e accumulando energia, riceve energia dall'altro, che contemporaneamente va estinguendosi e cedendo energia* (fig. 3a).

Negli istanti in cui w_L è nulla, w_C è massima e, viceversa, negli istanti in cui è massima w_L, w_C è zero. I valori massimi di w_L (per $\cos 2\omega t = -1$) e w_C (per $\cos 2\omega t = 1$) sono rispettivamente:

$$W_{Lmax} = \frac{1}{2}LI^2(1+1) = LI^2 = \frac{X_L}{\omega}I^2$$

$$W_{Cmax} = \frac{1}{2}CV_C^2(1+1) = CV_C^2 = \frac{X_C}{\omega}I^2$$

L'energia w_{LC} contenuta complessivamente, istante per istante, nei campi generati attorno al circuito, è data da:

$$w_{LC} = w_L + w_C = \frac{1}{2}\frac{X_L}{\omega}I^2(1-\cos 2\omega t) + \frac{1}{2}\frac{X_C}{\omega}I^2(1+\cos 2\omega t) = (X_L + X_C)\frac{I^2}{2\omega} - X\frac{I^2}{2\omega}\cos 2\omega t$$

Dove $X = X_L - X_C$ è la reattanza totale del circuito.

L'energia w_{LC} varia quindi nel tempo oscillando con legge sinusoidale di frequenza doppia di quella della corrente i, attorno al valore medio (fig. 3b):

$$W_{LCmedio} = (X_L + X_C)\frac{I^2}{2\omega} = \frac{LI^2 + CV_C^2}{2}$$

I valori estremi che essa assume durante il periodo, sono rispettivamente per $\cos 2\omega t = -1$ e per $\cos 2\omega t = 1$ pari a:

$$W'_{LC} = (X_L + X_C)\frac{I^2}{2\omega} + X\frac{I^2}{2\omega} = (X_L + X_C)\frac{I^2}{2\omega} + (X_L - X_C)\frac{I^2}{2\omega} = \frac{I^2}{2\omega}(X_L + X_C + X_L - X_C) = \frac{I^2}{\omega}X_L = LI^2$$

$$W''_{LC} = (X_L + X_C)\frac{I^2}{2\omega} - X\frac{I^2}{2\omega} = (X_L + X_C)\frac{I^2}{2\omega} - (X_L - X_C)\frac{I^2}{2\omega} = \frac{I^2}{2\omega}(X_L + X_C - X_L + X_C) = \frac{I^2}{\omega}X_C = CV_C^2$$

dei quali, ovviamente, W'_{LC} è il massimo e W''_{LC} è il minimo se $X_L > X_C$; il contrario se $X_L < X_C$.

La curva rappresentativa di w_{LC}, quindi, è tutta contenuta in una striscia, parallela all'asse delle ascisse, che, indipendentemente dal segno, ha ampiezza:

$$W'_{LC} - W''_{LC} = LI^2 - CV_C^2 = \frac{I^2}{\omega}X_L - \frac{I^2}{\omega}X_C = \frac{I^2}{\omega}(X_L - X_C) = \frac{X}{\omega}I^2$$

La quantità di energia contenuta complessivamente nei campi attorno al circuito, non aumenta mai al di sopra del maggiore tra i valori LI^2 e CV_C^2 e non diminuisce mai al di sotto del minore.
Quindi le variazioni della quantità complessiva di energia contenuta nei campi, corrispondono ai trasferimenti di energia dal circuito allo spazio o viceversa. Pertanto, *lo spazio attorno al circuito, occupato dai campi elettrico e magnetico generati dal circuito stesso, può immaginarsi come un serbatoio di energia con il quale il circuito effettua un continuo scambio, in misura tale che la quantità di energia in esso contenuta oscilla (ad ogni semiperiodo della corrente) fra un livello minimo ed un livello massimo definiti dagli estremi* LI^2 *e* CV_C^2.

L'energia contenuta nei campi attorno ad un circuito in regime sinusoidale permanente può considerarsi, quindi, distinta in due parti (fig. 3b):

- L'energia che rimane ***permanentemente immagazzinata*** nello spazio attorno al circuito e che non partecipa agli scambi energetici con il circuito stesso.
- L'energia che si trasferisce continuamente dal circuito allo spazio e viceversa, dando luogo a un flusso alternativo di potenza esattamente compensato periodo per periodo.

L'energia che rimane permanentemente immagazzinata nello spazio:

- Viene ***accumulata*** nei campi generati dal circuito, nel periodo transitorio durante il quale si stabilisce il regime elettrico del circuito.
- Viene ***conservata*** durante il funzionamento a regime permanente e, nel complesso, non varia fino a che non muta il regime del circuito.
- Viene infine ***integralmente restituita*** dai campi al circuito, nel periodo transitorio durante il quale la corrente del circuito si estingue e i condensatori si scaricano.

L'analisi istante per istante della ripartizione di w_{LC} fra i due campi (fig. 3c) mostra che ***l'energia permanentemente conservata dallo spazio attorno al circuito*** durante il funzionamento a regime, non rimane costantemente fissa in uno dei due campi, ma *si trasferisce continuamente dal campo elettrico a quello magnetico e viceversa, con uno scambio alternativo che ha luogo senza interessare gli altri flussi di energia entro il circuito*.

Questa energia è di entità tanto più grande, quanto maggiore è la più piccola delle due reattanze $X_L e\ X_C$; è ovviamente nulla quando una delle due reattanze è nulla.

L'energia che è scambiata fra il circuito e i campi generati attorno ad esso è, evidentemente, determinata dalla variazione di w_{LC} (fig. 3c).

Lo scambio è quindi rappresentato dall'andamento di w_{LC} dentro la striscia del diagramma comprese tra W_{LCmax} e W_{LCmin}; quindi l'energia scambiata in un periodo tra il circuito e lo spazio è data da:

$$W_{LCmax} - W_{LCmin} = LI^2 - CV_C^2 = \frac{I^2}{\omega}X_L - \frac{I^2}{\omega}X_C = \frac{I^2}{\omega}(X_L - X_C) = \frac{X}{\omega}I^2$$

cioè, *lo scambio di energia fra il circuito e lo spazio circostante è di entità tanto più grande, quanto maggiore è la reattanza X del circuito*.

Questo scambio è nullo quando X=0. Infatti, con circuito puramente ohmico, non può verificarsi alcun trasferimento di energia allo spazio perché non si creano in esso i campi capaci di assorbirla; se invece il circuito è in risonanza serie ($X_L = X_C$), l'energia trasferita dal circuito allo spazio durante il transitorio di chiusura, vi rimane permanentemente immagazzinata durante il funzionamento a regime, trasferendosi alternativamente dal campo elettrico a quello magnetico e viceversa senza interessare gli altri flussi di energia dentro il circuito (fig. 3c).

Figura 3 Andamento dei fenomeni conservativi dell'energia nel circuito in regime sinusoidale.
(La figura si riferisce a un circuito ohmico induttivo, nel quale $X_L > X_C$)

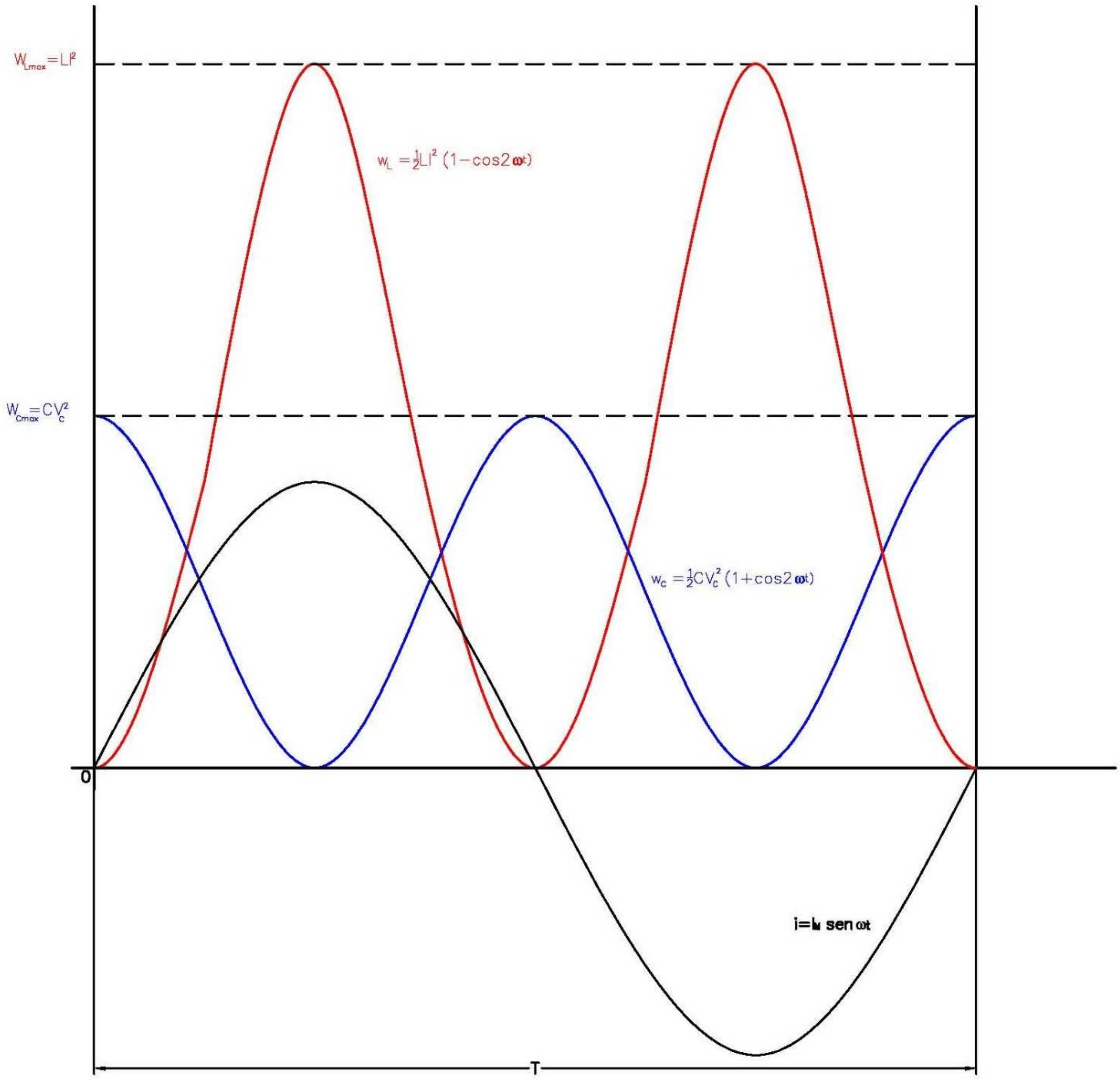


Figura 3a) Energia contenuta nei singoli campi attorno al circuito
Ognuno dei due campi, nella fase in cui va formandosi e accumulando energia, riceve energia dall'altro, che contemporaneamente va estinguendosi e cedendo energia.

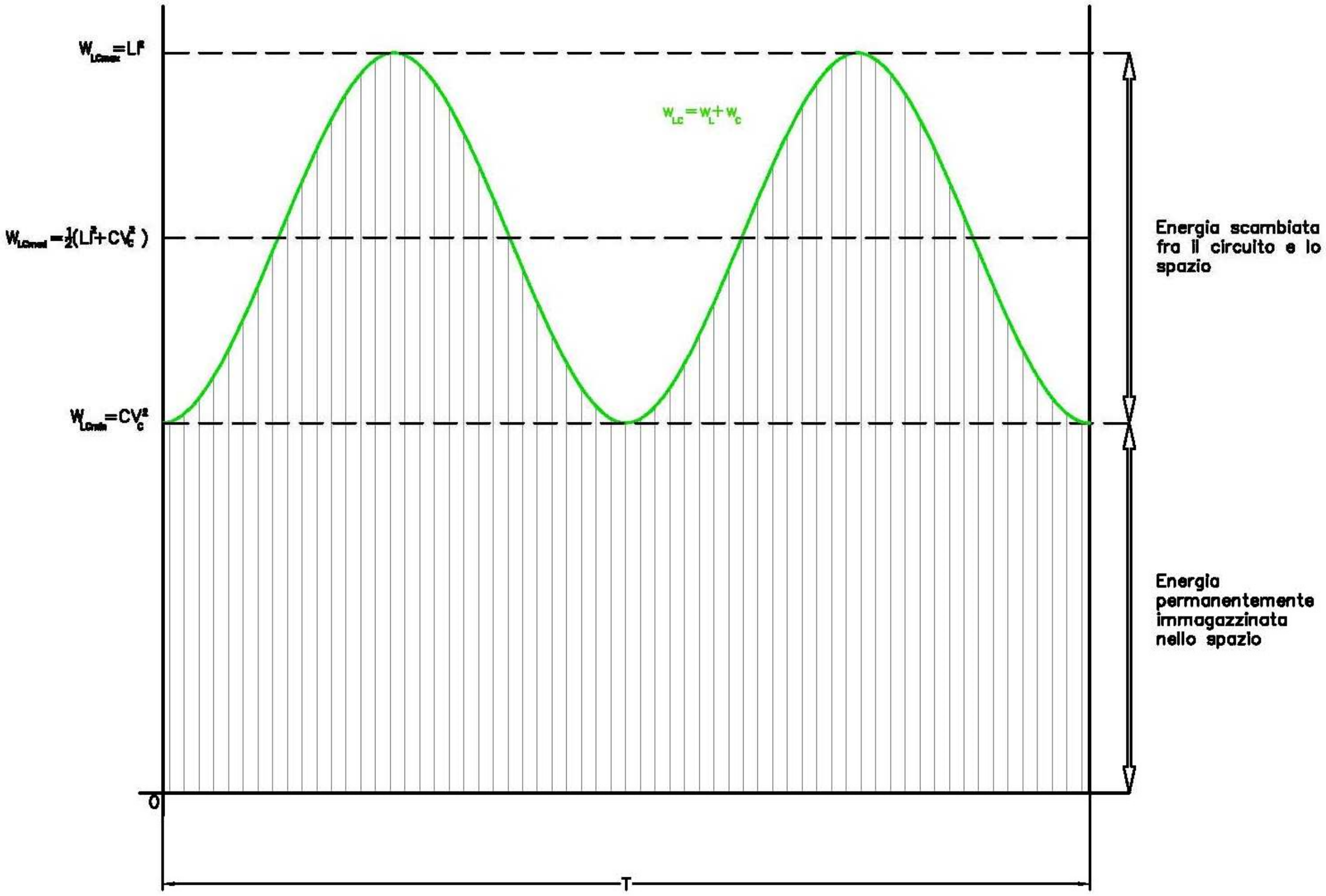


Figura 3b) Energia complessiva contenuta nello spazio attorno al circuito

L'energia w_{LC} varia oscillando, durante il periodo, fra un valore massimo LI^2 ed un valore minimo CV_C^2. Lo spazio attorno al circuito può dunque immaginarsi come un serbatoio di energia con il quale il circuito compie un continuo scambio, in misura tale che l'energia in esso contenuta oscilla fra il livello massimo LI^2 e il livello minimo CV_C^2.

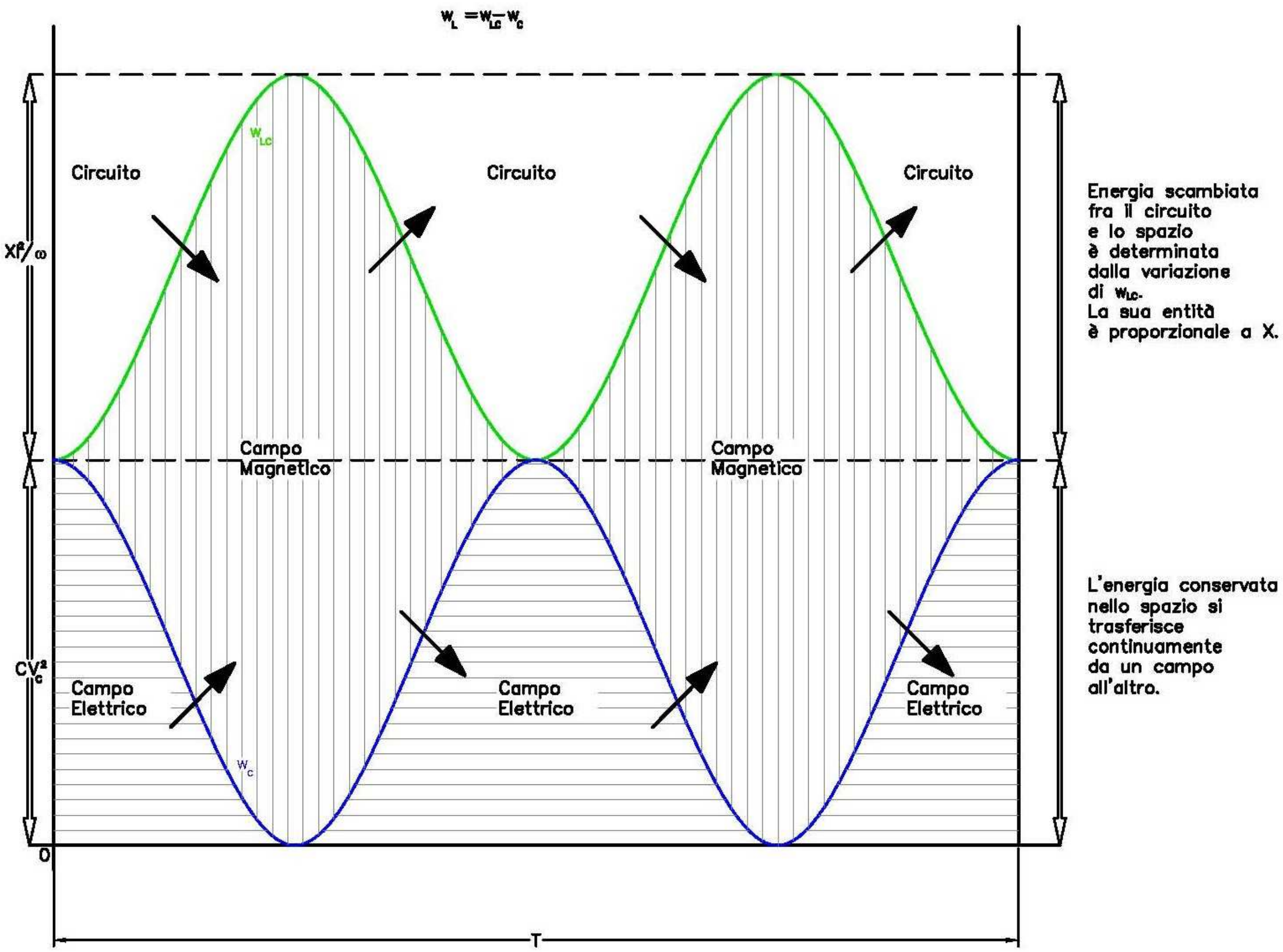


Figura 3c) I trasferimenti della energia relativa ai fenomeni conservativi

L'energia permanentemente conservata nello spazio viene ***accumulata*** *in esso nel periodo transitorio in cui si stabilisce il regime elettrico del circuito; viene* ***conservata*** *durante il funzionamento a regime; viene* ***restituita al circuito*** *quando la corrente si estingue ed i condensatori si scaricano.*

Lo scambio di energia fra il circuito e lo spazio è nullo quando X=0; vale a dire quando il circuito è puramente ohmico, oppure quando è in condizioni di risonanza.

3. *Potenze in regime sinusoidale*

In un circuito R, L e C serie che supponiamo di tipo ohmico induttivo, alimentato da un generatore di tensione sinusoidale, le espressioni istantanee della tensione e della corrente sono:

$$v = V_M \sin(\omega t + \varphi)$$
$$i = I_M \sin \omega t$$

Sappiamo che la potenza erogata dal generatore è il prodotto della tensione per la corrente, per cui:

$$p = vi = V_M \sin(\omega t + \varphi) * I_M \sin \omega t = \frac{1}{2} V_M I_M [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)] = \frac{1}{2} V\sqrt{2} I\sqrt{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)]$$
$$= VI[\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)] = VI \cos \varphi - VI \cos(2\omega t + \varphi)$$

Questa potenza si chiamerà ***potenza istantanea*** *ed è la potenza che, istante per istante, il generatore eroga al circuito*. Questa potenza istantanea serve quindi al fabbisogno in potenza di tutti i bipoli (R ed X) che costituiscono il sistema.

La potenza istantanea, come si vede chiaramente, è una funzione periodica non sinusoidale composta di un valore medio pari a $VI \cos \varphi$ e di una componente oscillante $VI \cos(2\omega t + \varphi)$, a frequenza doppia e di ampiezza VI, che chiameremo ***potenza fluttuante***. La potenza istantanea sarà nulla, evidentemente, nei punti in cui si annulla la tensione o la corrente. L'andamento nel tempo di questa potenza è riportato in figura 4.

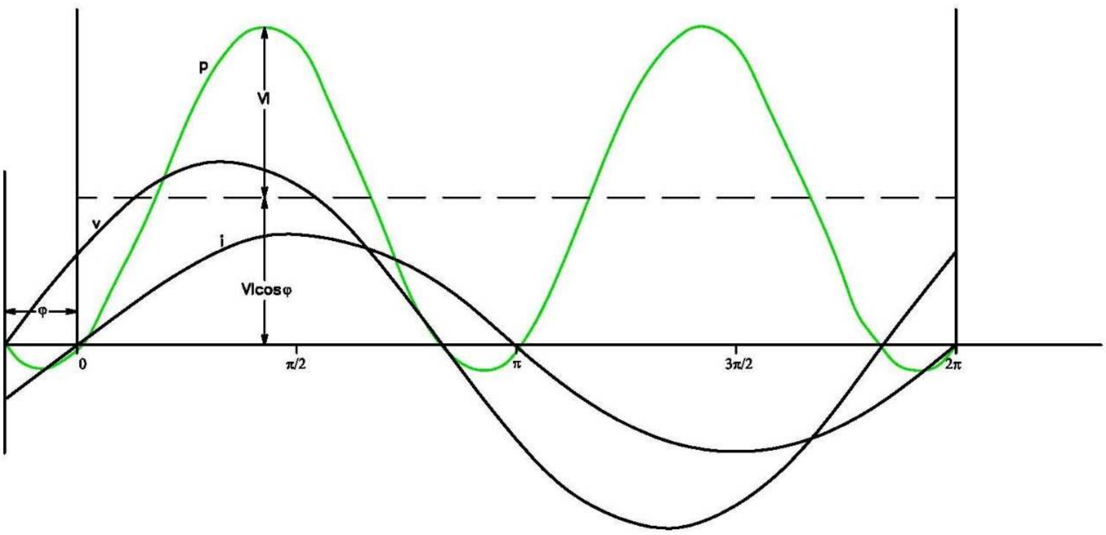


Figura 4 Potenza istantanea.

Poiché la potenza istantanea serve per alimentare tutti i bipoli del sistema, è chiaro che essa deve essere costituita da un termine che tiene conto dei fenomeni dissipativi e da un termine relativo ai fenomeni conservativi.

Nel circuito considerato, i soli fenomeni dissipativi che si verificano, sono quelli relativi alla trasformazione della potenza elettrica in calore da parte della resistenza. Per cui rammentando che la potenza dissipata per effetto Joule è uguale a Ri^2, avremo:

$$p_a = Ri^2 = R(I_M \sin \omega t)^2 = R\frac{1}{2} I_M^2 (1 - \cos 2\omega t) = \frac{1}{2} R\left(I\sqrt{2}\right)^2 (1 - \cos 2\omega t) = RI^2(1 - \cos 2\omega t)$$

Ricordando il triangolo delle tensioni, da cui si ha $RI = V \cos \varphi$ e sostituendo, otteniamo:

$$p_a = VI \cos \varphi (1 - \cos 2\omega t) = VI \cos \varphi - VI \cos \varphi \cos 2\omega t$$

Questa potenza si chiamerà ***potenza attiva istantanea*** *e rappresenta la potenza che la resistenza dissipa, istante per istante, per effetto Joule*. La potenza attiva istantanea varia dunque con un andamento oscillante $VI \cos\varphi \cos 2\omega t$, attorno al valore medio $VI \cos\varphi$. Essa sarà nulla quando la corrente passa per lo zero (figura 5).

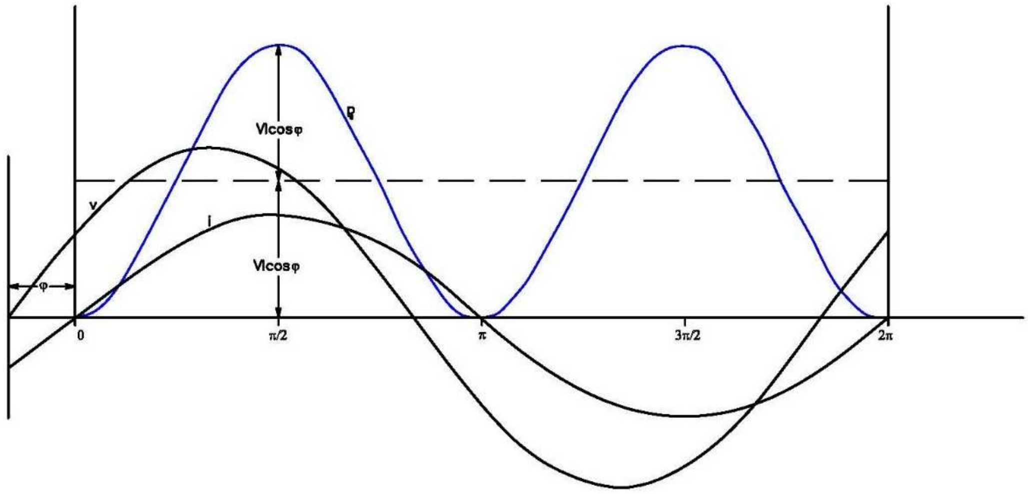


Figura 5 Potenza attiva istantanea.

Riprendendo ora l'espressione della potenza istantanea e sviluppando il $\cos(2\omega t + \varphi)$, otteniamo

$$p = VI \cos\varphi - VI \cos(2\omega t + \varphi) = VI \cos\varphi - VI \cos\varphi \cos 2\omega t + VI \sin\varphi \sin 2\omega t$$

Notiamo subito che i primi due termini, $VI \cos\varphi - VI \cos\varphi \cos 2\omega t$, non sono altro che l'espressione della potenza attiva istantanea, di conseguenza, il termine rimanente non potrà che essere relativo ai fenomeni conservativi del circuiti e cioè ai fenomeni legati ai componenti reattivi del sistema.

Definiamo quindi ***potenza reattiva istantanea***:

$$p_r = VI \sin\varphi \sin 2\omega t$$

Ossia la potenza scambiata, istante per istante, fra il circuito e lo spazio circostante.
Questa potenza varia nel tempo con legge sinusoidale di ampiezza $VI \sin\varphi$ e con frequenza doppia (figura 6).

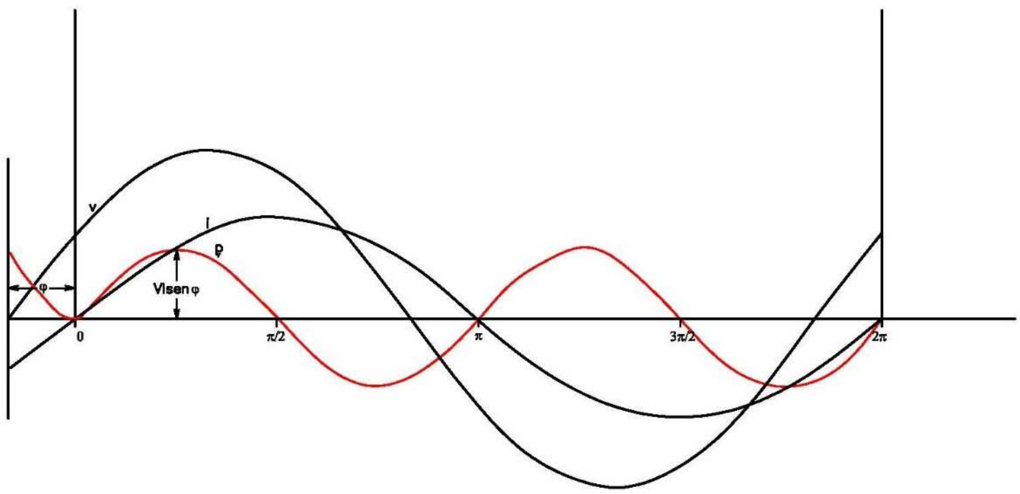


Figura 6 Potenza reattiva istantanea.

Quindi, il regime di scambi energetici ai quali dà luogo un circuito in regime permanente sinusoidale, è caratterizzato dai seguenti scambi di potenza (figura 7).

- Uno scambio alternato di potenza fra il campo elettrico e il campo magnetico che avviene nello spazio attorno al circuito, senza influenzare gli altri scambi di potenza nel suo interno;
- Uno scambio alternato di potenza fra il circuito e lo spazio (***potenza reattiva istantanea***), che ha andamento sinusoidale e quindi un valore medio nullo (scambio perfettamente compensato) con un'ampiezza $VI \sin \varphi$;
- Uno scambio unidirezionale di potenza fra il circuito e la resistenza (***potenza attiva istantanea***) avente valore medio $VI \cos \varphi$;
- Uno scambio alternato di potenza fra il generatore e il circuito (***potenza istantanea***) nel quale non vi è compensazione perché, nel corso del periodo, la potenza ceduta dal generatore al circuito è maggiore di quella restituita dal circuito al generatore; infatti, lo scambio di potenza ha un valore medio diverso da zero ($VI \cos \varphi$) ossia esattamente uguale al valore medio della potenza dissipata dalla resistenza del circuito.

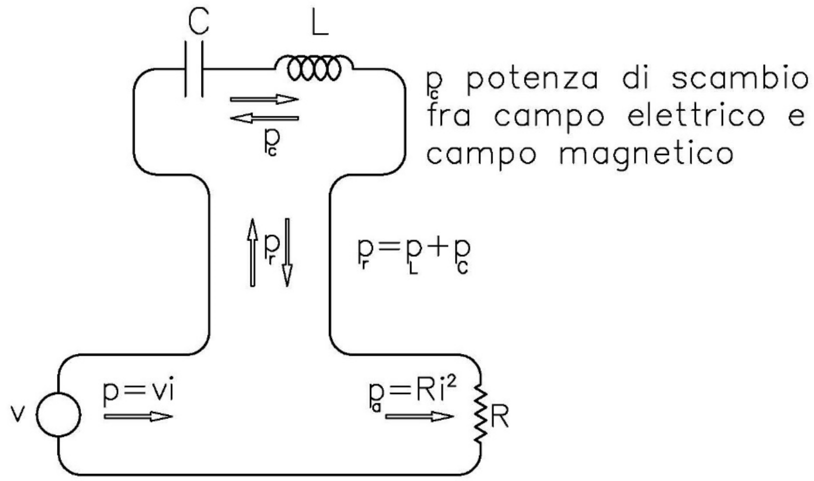


Figura 7 Scambi di potenza nel circuito in regime sinusoidale.

Definiamo ora:

- ***Potenza attiva P***: il valor medio della potenza istantanea o della potenza attiva istantanea (Figura 8).
  L'unità di misura è il watt [W]

$$P = VI \cos \varphi$$

- ***Potenza reattiva Q***: l'ampiezza della potenza reattiva istantanea (Figura 8).
  L'unità di misura è il volt ampere reattivo [VAR]

$$Q = VI \sin \varphi$$

- ***Potenza apparente S***: l'ampiezza della potenza fluttuante (Figura 8).
  L'unità di misura è il volt ampere [VA]

$$S = VI = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Ricordando il triangolo delle tensioni, abbiamo:

$$P = VI \cos \varphi = RI^2 = GV^2$$
$$Q = VI \sin \varphi = XI^2 = BV^2$$
$$S = VI = ZI^2 = YV^2$$

da cui ricaviamo il triangolo delle potenze.

Ricapitolando, quindi, possiamo affermare che il sistema complessivo degli scambi energetici di un circuito in regime sinusoidale, può essere rappresentato mediante *un unico scambio di potenza fra il generatore da un lato e lo spazio dall'altro*.

Infatti, dall'equazione che esprime il bilancio delle potenze:

$$p = p_a + p_r$$

Si rileva che il complesso degli scambi che avvengono nel circuito reale è equivalente all'erogazione da parte del generatore di un flusso di potenza p, ***potenza istantanea***, che risulta, istante per istante, dalla sovrapposizione di due flussi:

- Un flusso unidirezionale, dal generatore alla resistenza, che ha andamento pulsante attorno al valore medio $VI\cos\varphi$; il valore istantaneo di tale potenza p_a è la ***potenza attiva istantanea***;
- Un flusso alternativo e perfettamente compensato, fra il generatore ed i campi nello spazio attorno al circuito, che ha andamento sinusoidale di ampiezza $VI\sin\varphi$; il valore istantaneo di tale potenza p_r è la ***potenza reattiva istantanea***.

La figura 8 sintetizza quanto finora esposto.

Definiamo ora fattore di potenza (*f.d.p.*) il rapporto tra la potenza attiva e la potenza apparente:

$$f.d.p. = \frac{P}{S}$$

Nel caso nostro, di regime monofase sinusoidale, il fattore di potenza coincide con il $\cos\varphi$, infatti

$$f.d.p. = \frac{P}{S} = \frac{VI\cos\varphi}{VI} = \cos\varphi$$

Infine introduciamo una potenza che non ha alcun significato fisico ma è molto utile nei calcoli, ***la potenza complessa***.

$$\bar{S} = \dot{V}\check{I} = Ve^{j\psi_V}Ie^{-j\psi_I} = VIe^{j(\psi_V-\psi_I)} = VIe^{j\varphi} = VI\cos\varphi + jVI\sin\varphi = P + jQ$$

La sua unità di misura è il volt ampere complesso [VAC].

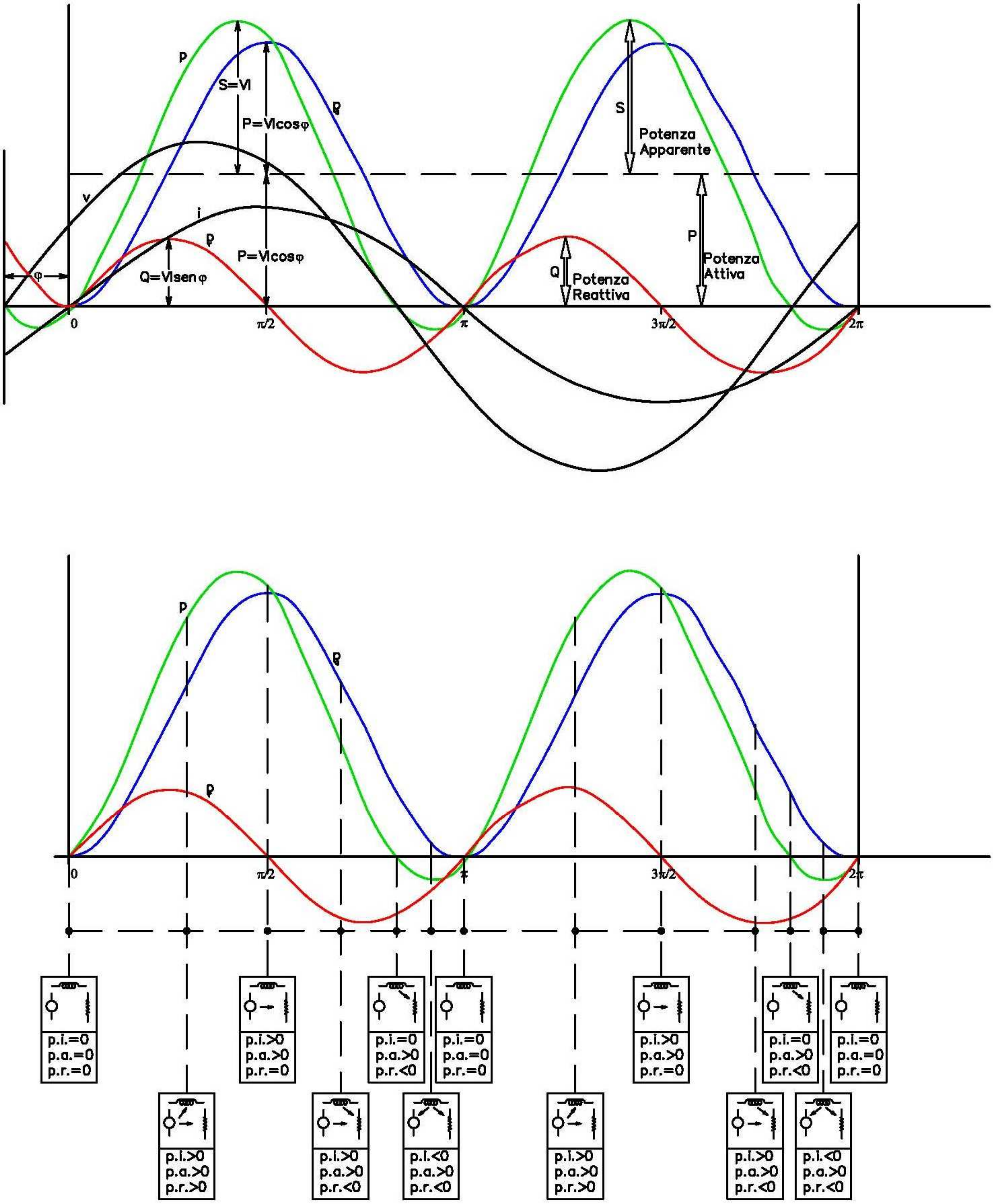


Figura 8 Scambi di potenza nel circuito in regime sinusoidale.

In conclusione, possiamo ricapitolare le potenze affermando che:

Il regime energetico del circuito in regime sinusoidale può essere rappresentato da un *circuito equivalente* nel quale avviene un *unico scambio di potenza fra il generatore da un lato e la resistenza e lo spazio dall'altro*.

In virtù dell'equazione del bilancio della potenza:

$$p = p_a + p_r$$

la potenza erogata istante per istante dal generatore (***potenza istantanea***) è data dalla somma della potenza dissipata istante per istante dal resistore (***potenza attiva istantanea***) e della potenza scambiata istante per istante fra il generatore ed i campi nello spazio attorno al circuito (***potenza reattiva istantanea***).

Quindi, la potenza istantanea può essere immaginata come la somma di due elementi, di cui una p_a è sempre positiva e oscilla attorno ad un valore medio che si chiama ***potenza attiva P*** del circuito ($P = VI\cos\varphi$); l'altra p_r varia nel tempo secondo una sinusoide la cui ampiezza si dice ***potenza reattiva Q*** del circuito ($Q = VI\sin\varphi$).

L'ampiezza dell'oscillazione di p attorno al suo valore medio P, si chiama ***potenza apparente S*** del circuito ($S = VI$).
Fra i tre parametri P, Q ed S esiste la relazione

$$S^2 = P^2 + Q^2$$

4. *Teorema del massimo trasferimento di potenza*

Consideriamo il generatore di tensione non ideale rappresentato in fig.9, la cui impedenza interna, com'è possibile notare, è $\bar{Z}_i$.

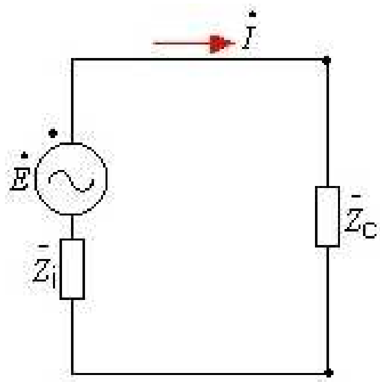


Figura 9

Supponiamo che tale generatore alimenti un carico d'impedenza $\bar{Z}_c$, vogliamo trovare la condizione che deve essere verificata affinché il generatore fornisca al carico la massima potenza.
È necessario prestare attenzione al fatto che non stiamo cercando una condizione che ci garantisca che sul carico sia trasferita la più alta percentuale della potenza prodotta (massimo rendimento), ma solo la maggiore potenza possibile.
Ricordiamo che la potenza attiva dissipata sul carico è

$$P_c = R_c I^2 \qquad \text{(a)}$$

facendo riferimento al circuito di fig.9 è possibile notare che

$$I = \frac{E}{|\bar{Z}_i + \bar{Z}_c|}$$

sostituendo questa nella (a) si ottiene

$$P_c = R_c \frac{E^2}{|\bar{Z}_i + \bar{Z}_c|^2} = R_c \frac{E^2}{(R_i + R_c)^2 + (X_i + X_c)^2}$$

Affinché questa sia massima occorre, innanzitutto, che il denominatore sia minimo e quindi, essendo il denominatore sempre positivo (somma di due grandezze sempre positive) è sufficiente che uno dei due addendi sia nullo e non potendo avere resistenze negative occorre agire sulle reattanze, per cui è possibile dedurre che deve essere

$$X_i = -X_c$$

Verificata tale condizione la potenza diventa quindi

$$P_c = R_c \frac{E^2}{(R_i + R_c)^2}$$

dobbiamo adesso, quindi, trovare una condizione su R_c. In altre parole è necessario studiare la funzione al variare di tale parametro ed in particolare a noi interessa trovare il valore di R_c che la renda massima, per far ciò è possibile derivare e porre la derivata uguale a zero,

$$\frac{dP_c}{dR_c} = E^2 \frac{d}{dR_c}\left[\frac{R_c}{(R_i + R_c)^2}\right] = E^2 \frac{(R_i + R_c)^2 - 2R_c(R_i + R_c)}{(R_i + R_c)^4} = E^2 \frac{R_i + R_c - 2R_c}{(R_i + R_c)^3} = E^2 \frac{R_i - R_c}{(R_i + R_c)^3} = 0$$

Quindi affinché la derivata sia nulla occorre che sia nullo il numeratore e cioè:

$$R_i = R_c$$

abbiamo quindi trovato che la derivata prima si annulla quando la resistenza del carico coincide con la resistenza del generatore.
Vogliamo adesso verificare che effettivamente per questo valore di R_c la potenza è massima, a tal proposito è possibile osservare che il denominatore $(R_i + R_c)^3$ della derivata è sempre positivo (somma di numeri positivi elevata al cubo), il numeratore $R_i - R_c$ è positivo e quindi derivata positiva e funzione crescente quando $R_i > R_c$; per $R_i < R_c$ derivata negativa e quindi funzione decrescente. È pertanto possibile concludere che per $R_i = R_c$ abbiamo effettivamente un massimo.
Riassumendo, il teorema del massimo trasferimento di potenza afferma che il generatore fornisce al carico la massima potenza possibile se si verifica che

$$\bar{Z}_c = \check{Z}_i$$

in altre parole che l'impedenza del carico è il complesso coniugato dell'impedenza interna del generatore.

5. *Energia negli accoppiamenti mutui*

Sia dato il seguente sistema di fig. 10:

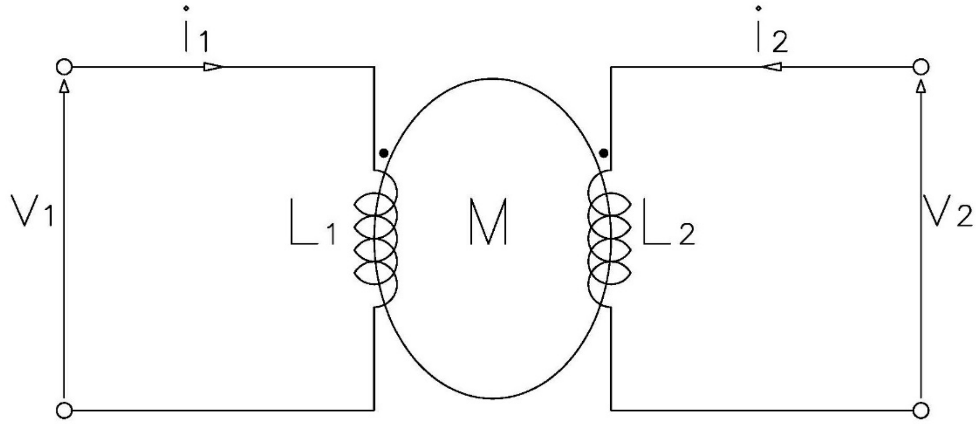


Fig. 10

vogliamo determinare l'energia istantanea e quella media immagazzinata nei campi magnetici di auto e mutua induzione. Sappiamo che

$$v_1 + e_{L1} + e_{M21} = 0$$
$$v_2 + e_{L2} + e_{M12} = 0$$

ed essendo $M > 0$, entrambe le correnti entrano nei morsetti contrassegnati, abbiamo

$$v_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} - M_{21} \frac{di_2}{dt} = 0$$
$$v_2 - L_2 \frac{di_2}{dt} - M_{12} \frac{di_1}{dt} = 0$$

cioè

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{21} \frac{di_2}{dt}$$
$$v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{12} \frac{di_1}{dt}$$

La potenza istantanea che compete al sistema sappiamo essere

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2$$

quindi

$$p = L_1 \frac{di_1}{dt} i_1 + M_{21} \frac{di_2}{dt} i_1 + L_2 \frac{di_2}{dt} i_2 + M_{12} \frac{di_1}{dt} i_2$$

e considerando che per il teorema di reciprocità $M_{21} = M_{21} = M$

$$p = L_1 \frac{di_1}{dt} i_1 + M \frac{di_2}{dt} i_1 + L_2 \frac{di_2}{dt} i_2 + M \frac{di_1}{dt} i_2$$

$$p = L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M \left[i_1 \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{di_1}{dt} \right] + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt}$$

L'energia istantanea è data dall'integrale nel tempo della potenza istantanea e, supponendo $t_0 = 0$ l'istante iniziale, abbiamo

$$\begin{aligned} w = \int_0^t p dt &= \int_0^t \left[L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M \left[i_1 \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{di_1}{dt} \right] + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} \right] dt \\ &= \int_0^t L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} dt + \int_0^t M \left[i_1 \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{di_1}{dt} \right] dt + \int_0^t L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} dt \end{aligned}$$

ed essendo i coefficienti L_1, L_2 ed M costanti, si ha

$$w = L_1 \int_{i_1(0)}^{i_1(t)} i_1 di_1 + M \int_a^b [i_1 di_2 + i_2 di_1] + L_2 \int_{i_2(0)}^{i_2(t)} i_2 di_2$$

con a e b opportuni estremi di integrazione. Osservando poi che $[i_1 di_2 + i_2 di_1]$ è il differenziale esatto di $i_1 i_2$, ovvero

$$d(i_1 i_2) = i_1 di_2 + i_2 di_1$$

abbiamo

$$\begin{aligned} w &= L_1 \int_{i_1(0)}^{i_1(t)} i_1 di_1 + M \int_{i_1(0) i_2(0)}^{i_1(t) i_2(t)} d(i_1 i_2) + L_2 \int_{i_2(0)}^{i_2(t)} i_2 di_2 \\ &= \frac{1}{2} L_1 [i_1^2(t) - i_1^2(0)] + M [i_1(t) i_2(t) - i_1(0) i_2(0)] + \frac{1}{2} L_2 [i_2^2(t) - i_2^2(0)] \end{aligned}$$

Ipotizziamo ora che all'istante iniziale $t = 0$ il circuito sia scarico, privo di energia, cioè che

$$i_1(0) = i_2(0) = 0$$

abbiamo che l'energia istantanea immagazzinata nell'accoppiamento è data da

$$w = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + M i_1(t) i_2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) + M i_1(t) i_2(t)$$

Supponiamo adesso che le correnti siano sinusoidali e cioè

$$i_1 = \sqrt{2}I_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$
$$i_2 = \sqrt{2}I_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

di conseguenza l'energia istantanea sarà

$$\begin{aligned} w = \frac{1}{2}L_1 i_1^2(t) + + \frac{1}{2}L_2 i_2^2(t) + M i_1(t) i_2(t) = \\ = \frac{1}{2}L_1\left(\sqrt{2}I_1\right)^2 \sin^2(\omega t + \varphi_1) \\ + \frac{1}{2}L_2\left(\sqrt{2}I_2\right)^2 \sin^2(\omega t + \varphi_2) + M\sqrt{2}I_1 \sin(\omega t + \varphi_1)\,\sqrt{2}I_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \end{aligned}$$

ricordando la formula di Werner

$$\sin \propto \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}L_1(\sqrt{2}I_1)^2 \sin^2(\omega t + \varphi_1) = \frac{1}{2}L_1 2 I_1^2 \frac{1}{2}[\cos(\omega t + \varphi_1 - \omega t - \varphi_1) - \cos(\omega t + \varphi_1 + \omega t + \varphi_1)] \\ = L_1 I_1^2 \frac{1}{2}[\cos(0) - \cos 2(\omega t + \varphi_1)] = \frac{1}{2}L_1 I_1^2[1 - \cos 2(\omega t + \varphi_1)] \end{aligned}$$

analogamente

$$\frac{1}{2}L_1(\sqrt{2}I_1)^2 \sin^2(\omega t + \varphi_1) = \frac{1}{2}L_2 I_2^2[1 - \cos 2(\omega t + \varphi_2)]$$

$$\begin{aligned} M\sqrt{2}I_1 \sin(\omega t + \varphi_1)\,\sqrt{2}I_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = M\sqrt{2}I_1\sqrt{2}I_2 \frac{1}{2}[\cos(\omega t + \varphi_1 - \omega t - \varphi_2) - \cos(\omega t + \varphi_1 + \omega t + \varphi_2)] \\ = M I_1 I_2[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)] \end{aligned}$$

per cui

$$w = \frac{1}{2}L_2 I_2^2[1 - \cos 2(\omega t + \varphi_2)] + \frac{1}{2}L_2 I_2^2[1 - \cos 2(\omega t + \varphi_2)] + M I_1 I_2[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)]$$

e, chiaramente, il valore medio dell'energia immagazzinata nell'accoppiamento è dato da

$$W = \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Sommario

Energia e potenza nei circuiti monofase in regime sinusoidale 2

1. Analisi degli scambi di energia nel circuito 2
2. Il bilancio energetico del circuito in regime sinusoidale 5
3. Potenze in regime sinusoidale 11
4. Teorema del massimo trasferimento di potenza 17
5. Energia negli accoppiamenti mutui 19

Sommario 22