UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MESSINA
Dipartimento di Ingegneria
Contrada Di Dio I, 98166 – Villaggio S. Agata Messina

Appunti Corso di Elettrotecnica

Linee con cavo coassiale

Anno Accademico 2016-2017

prof. ing. Bruno Azzerboni

Fonti:
Lezioni di Elettrotecnica Generale *- Giulio Battistini*
Colombo Cursi Pisa

Linee con cavo coassiale

1.1 Coefficiente di autoinduzione di un cavo coassiale

Sia dato il cavo coassiale di fig. 1

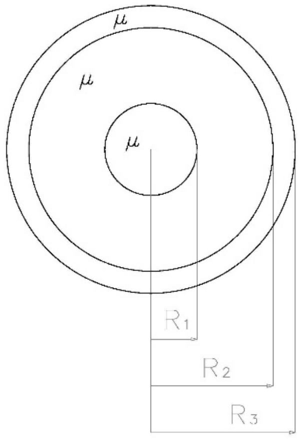

Fig. 1 – Cavo coassiale

esso è costituito da due conduttori coassiali lunghi l, di sezione S e percorsi dalla medesima corrente I; il conduttore interno sia l'andata la guaina il ritorno.
L'induttanza del cavo, per definizione, è data da:

$$L = \frac{\Phi_\Sigma}{I}$$

dove Φ_Σ è il flusso totalmente concatenato con il cavo e sarà la somma di tre termini che analizzeremo separatamente:

$$\Phi_\Sigma = \Phi_1^* + \Phi_2^* + \Phi_3^*$$

Esaminiamo *il flusso* Φ_1^* *che è concatenato con il conduttore interno*.

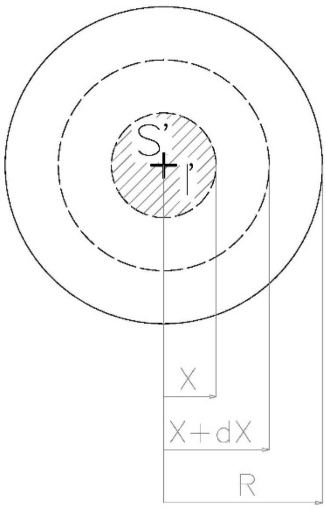

Fig. 2 – Calcolo del flusso Φ_1^*

Il campo magnetico calcolato in un punto sulla circonferenza di raggio x e superficieS' è dato da:

$$H = \frac{I'}{2\pi x}$$

dove I' è la parziale corrente concatenata con la circonferenza, è quindi solo questa corrente che dà contributo al campo. Per calcolare questa corrente parziale, conviene ipotizzare che l'intera corrente I sia uniformemente distribuita nella sezione del conduttore e, quindi, lavorare a densità di corrente costante, per cui si ha:

$$\frac{I'}{S'} = \frac{I}{S}$$

da cui:

$$I' = I\frac{S'}{S} = I\frac{\pi x^2}{\pi R^2} = I\frac{x^2}{R^2}$$

quindi:

$$H = \frac{I'}{2\pi x} = \frac{I}{2\pi x}\frac{x^2}{R^2} = \frac{I}{2\pi}\frac{x}{R^2}$$

di conseguenza il flusso elementare che attraversa la sezione ldx, è dato da:

$$d\Phi_1' = BS' = \mu HS' = \mu\frac{I}{2\pi}\frac{x}{R^2}ldx$$

$d\Phi_1'$ è totalmente concatenato con la corrente I' e parzialmente concatenato con la corrente I, quindi, esso equivale, a parità di energia immagazzinata, ad un flusso più piccolo però totalmente concatenato con la corrente I, cioè:

$$d\Phi_1' I' = d\Phi_1^* I \qquad parità\ di\ energia$$

da cui:

$$d\Phi_1^* = d\Phi_1'\frac{I'}{I} = d\Phi_1'\frac{S'}{S} = d\Phi_1'\frac{x^2}{R^2}$$

cioè

$$d\Phi_1^* = \mu\frac{I}{2\pi}\frac{x}{R^2}ldx\frac{x^2}{R^2} = \mu\frac{I}{2\pi}\frac{l}{R^4}x^3dx$$

per cui

$$\Phi_1^* = \int_0^R d\Phi_1^* = \mu\frac{I}{2\pi}\frac{l}{R^4}\int_0^R x^3dx = \mu\frac{I}{8\pi}\frac{l}{R^4}R^4 = \frac{\mu Il}{8\pi}$$

Esaminiamo ora *il flusso* Φ_2^* *che è totalmente concatenato con la corrente e compreso nello spazio tra il conduttore e la guaina.*

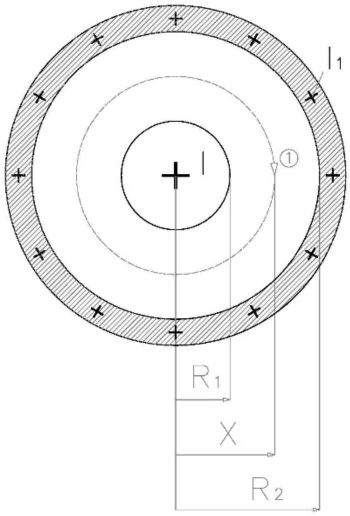

Fig. 3 – Calcolo del flusso Φ_2^*

Il campo magnetico calcolato in un punto sulla circonferenza di raggio x esterna al conduttore interno è dato da:

$$H = \frac{I}{2\pi x}$$

di conseguenza il flusso elementare che attraversa la sezione ldx, è dato da:

$$d\Phi_2^* = \mu \frac{I}{2\pi x} ldx$$

per cui:

$$\Phi_2^* = \int_{R_1}^{R_2} d\Phi_2^* = \mu \frac{Il}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dx}{x} = \mu \frac{Il}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Calcoliamo, infine, *il flusso* Φ_3^* *che è parzialmente concatenato con la linea guaina.*

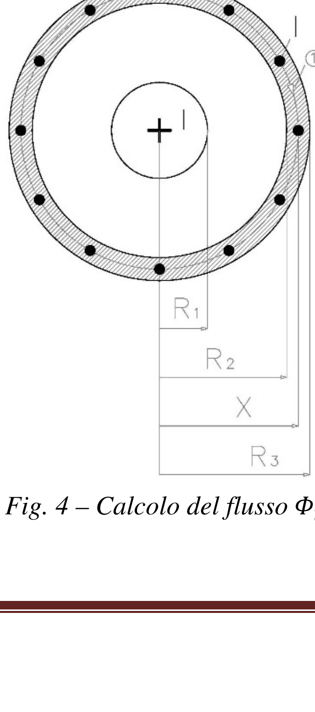

Fig. 4 – Calcolo del flusso Φ_3^*

Applichiamo la legge della circuitazione alla linea di forza 1:

$$H = \frac{I - I'}{2\pi x}$$

dove I' è la corrente concatenata con al linea di forza, lavorando a parità di densità di corrente abbiamo

$$I' = I\frac{\pi x^2 - \pi R_2^2}{\pi R_3^2 - \pi R_2^2} = I\frac{x^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

per cui

$$H = \frac{1}{2\pi x}(I - I') = \frac{1}{2\pi x}\left(I - I\frac{x^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right) = \frac{I}{2\pi x}\left(1 - \frac{x^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right) = \frac{I}{2\pi x}\left(\frac{R_3^2 - R_2^2 - x^2 + R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right) = \frac{I}{2\pi x}\left(\frac{R_3^2 - x^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)$$

di conseguenza il flusso elementare che attraversa la sezione ldx, è dato da:

$$d\Phi_3' = \mu\frac{I}{2\pi x}\left(\frac{R_3^2 - x^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)ldx$$

Il flusso elementare $d\Phi_3'$, generato da I è concatenato con la corrente $(I - I')$, equivale quindi ad un flusso più piccolo $d\Phi_3^*$ totalmente concatenato con la corrente I, allora:

$$d\Phi_3'(I - I') = d\Phi_3^* I$$

$$d\Phi_3^* = d\Phi_3'\frac{(I - I')}{I} = \frac{d\Phi_3'}{I}I\left(\frac{R_3^2 - x^2}{R_3^2 - R_2^2}\right) = d\Phi_3'\left(\frac{R_3^2 - x^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)$$

da cui

$$\begin{aligned} d\Phi_3^* &= \mu\frac{I}{2\pi x}\left(\frac{R_3^2 - x^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)ldx\left(\frac{R_3^2 - x^2}{R_3^2 - R_2^2}\right) = \mu\frac{I}{2\pi x}\frac{(R_3^2 - x^2)^2}{(R_3^2 - R_2^2)^2}ldx = \frac{\mu Il}{2\pi(R_3^2 - R_2^2)^2}\frac{R_3^4 + x^4 - 2R_3^2x^2}{x}dx \\ &= \frac{\mu Il}{2\pi(R_3^2 - R_2^2)^2}\left(\frac{R_3^4}{x}dx + x^3dx - 2R_3^2xdx\right) \end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \Phi_3^* = \int_{R_2}^{R_3} d\Phi_3^* &= \frac{\mu Il}{2\pi(R_3^2 - R_2^2)^2}\int_{R_2}^{R_3}\left(\frac{R_3^4}{x}dx + x^3dx - 2R_3^2xdx\right) \\ &= \frac{\mu Il}{2\pi(R_3^2 - R_2^2)^2}\left(\int_{R_2}^{R_3}\frac{R_3^4}{x}dx + \int_{R_2}^{R_3}x^3dx - \int_{R_2}^{R_3}2R_3^2xdx + \right) \\ &= \frac{\mu Il}{2\pi(R_3^2 - R_2^2)^2}\left[R_3^4\ln\frac{R_3}{R_2} + \frac{1}{4}(R_3^4 - R_2^4) - R_3^2(R_3^2 - R_2^2)\right] \\ &= \frac{\mu Il}{2\pi(R_3^2 - R_2^2)}\left[\frac{R_3^4}{R_3^2 - R_2^2}\ln\frac{R_3}{R_2} + \frac{1}{4}\frac{(R_3^2 + R_2^2)(R_3^2 - R_2^2)}{R_3^2 - R_2^2} - R_3^2\frac{(R_3^2 - R_2^2)}{R_3^2 - R_2^2}\right] \\ &= \frac{\mu Il}{2\pi(R_3^2 - R_2^2)}\left[\frac{R_3^4}{R_3^2 - R_2^2}\ln\frac{R_3}{R_2} + \frac{1}{4}(R_3^2 + R_2^2) - R_3^2\right] \\ &= \frac{\mu Il}{2\pi(R_3^2 - R_2^2)}\left(\frac{R_3^4}{R_3^2 - R_2^2}\ln\frac{R_3}{R_2} + \frac{1}{4}R_3^2 + \frac{1}{4}R_2^2 - R_3^2\right) = \frac{\mu Il}{2\pi(R_3^2 - R_2^2)}\left(\frac{R_3^4}{R_3^2 - R_2^2}\ln\frac{R_3}{R_2} - \frac{3R_3^2 - R_2^2}{4}\right) \end{aligned}$$

Infine

$$\Phi_3^* = \frac{\mu Il}{2\pi}\left[\left(\frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)^2\ln\frac{R_3}{R_2} - \frac{3R_3^2 - R_2^2}{4(R_3^2 - R_2^2)}\right]$$

In conclusione l'induttanza L del cavo coassiale è data da:

$$L = \frac{\Phi_\Sigma}{I} = \frac{\Phi_1^* + \Phi_2^* + \Phi_3^*}{I} = \frac{1}{I}\left\{\frac{\mu I l}{8\pi} + \frac{\mu I l}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{\mu I l}{2\pi}\left[\left(\frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)^2 \ln\frac{R_3}{R_2} - \frac{3R_3^2 - R_2^2}{4(R_3^2 - R_2^2)}\right]\right\}$$
$$= \frac{\mu l}{2\pi}\left[\frac{1}{4} + \ln\frac{R_2}{R_1} + \left(\frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)^2 \ln\frac{R_3}{R_2} - \frac{3R_3^2 - R_2^2}{4(R_3^2 - R_2^2)}\right]$$

Osservazioni

- abbiamo supposto, per semplicità, che tutti gli elementi del cavo coassiale avessero la medesima permeabilità magnetica. Se così non fosse allora avremmo avuto

$$\Phi_1^* = \frac{\mu_1 I l}{8\pi};\quad \Phi_2^* = \frac{\mu_2 I l}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1};\quad \Phi_3^* = \frac{\mu_3 I l}{2\pi}\left[\left(\frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)^2 \ln\frac{R_3}{R_2} - \frac{3R_3^2 - R_2^2}{4(R_3^2 - R_2^2)}\right]$$

- nel calcolo del flusso Φ_2^* abbiamo messo una corrente nella guaina diversa da quella che circola nel conduttore interno, ciò però non ha alcuna importanza in quanto questa corrente (I_1), chiaramente non dà contributo al flusso stesso. In pratica, sia nella guaina sia nel conduttore interno, scorre la medesima corrente, di andata nel conduttore interno e di ritorno nella guaina, così infatti abbiamo fatto nel calcolo del flusso Φ_3^*.

- nel calcolo del flusso Φ_3^* se si fosse considerata la corrente nella guaina di verso concorde a quello della corrente nel conduttore interno, si sarebbero solamente complicati i calcoli, con conseguente variazione del flusso, e ciò non valeva la pena di farlo in quanto, come già detto prima, nella realtà le due correnti sono uguali ed opposte.

- trascurando i flussi parzialmente concatenati con la guaina ed ipotizzando la medesima permeabilità magnetica l'induttanza del cavo coassiale diventa

$$L = \frac{\Phi_\Sigma}{I} = \frac{\Phi_1^* + \Phi_2^*}{I} = \frac{\mu l}{8\pi} + \frac{\mu l}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1} = \frac{\mu l}{2\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{R_2}{R_1}\right)$$

1.2 Calcolo di linee con cavi coassiali

Sia dato il sistema di fig. 5

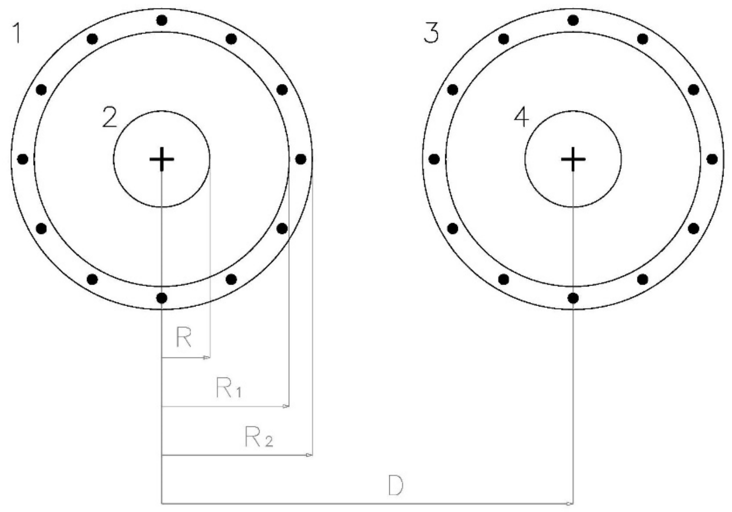

Fig. 5 – Linea costituita da due cavi coassiali

per semplificarci i calcoli, senza commettere grossolani errori, ipotizziamo come in realtà è, che lo spessore della guaina sia molto piccolo, ci riferiremo cioè ad un cavo coassiale con guaina di spessore nullo e di raggio $(R_2 + R_1)/2$ come in figura 6.

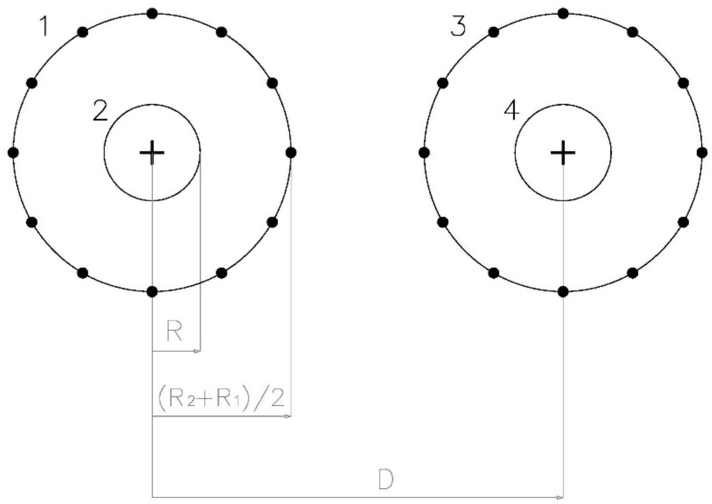

Fig. 6 – Linea costituita da due cavi coassiali con guaina di spessore nullo

Maglia 1-2

Il cavo coassiale è adoperato in maniera tale che la corrente nella guaina (I_g) sia uguale ed opposta alla corrente che fluisce nel conduttore interno (I_c). Il flusso, quindi, all'esterno del cavo è nullo. Applicando infatti la legge della circuitazione ad una linea di flusso esterna al cavo, cioè ad una circonferenza con centro sull'asse del cavo, abbiamo

$$Hl = I_g - I_c$$

e poiché $I_g = I_c$ avremo $Hl = 0$; quindi essendo H e, di conseguenza Φ nullo, sulla maglia 1-2 la maglia 3-4 non induce nulla per cui il flusso totalmente concatenato con la maglia 1-2 è solamente il flusso di autoinduzione

$$\dot{\Phi}_{\Sigma 12} = L_{12}\left(I_g + I_c\right)$$

dove

$$L_{12} = \frac{\mu l}{2\pi}\left[\frac{1}{4} + \ln\frac{(R_2 + R_1)/2}{R}\right]$$

Maglia 3-4

Per questa maglia valgono interamente le considerazioni fatte per la maglia 1-2, quindi

$$\dot{\Phi}_{\Sigma 34} = L_{34}\left(I_g + I_c\right)$$

dove

$$L_{34} = \frac{\mu l}{2\pi}\left[\frac{1}{4} + \ln\frac{(R_2 + R_1)/2}{R}\right]$$

Maglia 1-3

Rammentando quanto detto per le linee aeree parallele, abbiamo

$$L_{13} = \frac{\mu l}{2\pi}\left[\frac{1}{2} + \ln\frac{D}{(R_2 + R_1)/2}\right]$$

$$M_{2-13} = \frac{\mu l}{2\pi}\int_{\frac{(R_2+R_1)}{2}}^{D-\frac{(R_2+R_1)}{2}}\frac{dx}{x} = \frac{\mu l}{2\pi}\ln\frac{D - \frac{(R_2 + R_1)}{2}}{\frac{(R_2 + R_1)}{2}}$$

$$M_{4-13} = \frac{\mu l}{2\pi}\int_{\frac{(R_2+R_1)}{2}}^{D-\frac{(R_2+R_1)}{2}}\frac{dx}{x} = \frac{\mu l}{2\pi}\ln\frac{D - \frac{(R_2 + R_1)}{2}}{\frac{(R_2 + R_1)}{2}}$$

avendo scelto la maglia 1-3 e quindi il verso di percorrenza, si ha

$$M_{2-13} < 0 \quad ed \quad M_{4-13} > 0$$

Infine

$$\dot{\Phi}_{\Sigma 13} = \frac{L_{13}}{2}\dot{I}_1 - \frac{L_{13}}{2}\dot{I}_3 - M_{2-13}\dot{I}_2 + M_{4-13}\dot{I}_4$$

Maglia 2-4

Analogamente

$$L_{24} = \frac{\mu l}{2\pi}\left[\frac{1}{2} + \ln\frac{D}{R}\right]$$

$$M_{1-24} = \frac{\mu l}{2\pi}\int_{\frac{(R_2+R_1)}{2}}^{D}\frac{dx}{x} = \frac{\mu l}{2\pi}\ln\frac{D}{\frac{(R_2+R_1)}{2}}$$

$$M_{3-24} = \frac{\mu l}{2\pi}\int_{\frac{(R_2+R_1)}{2}}^{D}\frac{dx}{x} = \frac{\mu l}{2\pi}\ln\frac{D}{\frac{(R_2+R_1)}{2}}$$

c'è da notare che dentro lo spazio fra conduttore interno e guaina il flusso generato dalla corrente circolante nella guaina è nullo, come già visto, ed ecco perché gli integrali per il calcolo dei coefficienti di mutua hanno come estremo inferiore $(R_2 + R_1)/2$ e non R. Con il medesimo ragionamento fatto per la maglia 1-3, si ha

$$M_{1-24} < 0 \quad ed \quad M_{3-24} > 0$$

Infine

$$\dot{\Phi}_{\Sigma 24} = \frac{L_{24}}{2}\dot{I}_2 - \frac{L_{24}}{2}\dot{I}_4 - M_{1-24}\dot{I}_1 + M_{3-24}\dot{I}_3$$

Sommario