

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MESSINA
Dipartimento di Ingegneria
Contrada Di Dio I, 98166 – Villaggio S. Agata Messina

Appunti Corso di Elettrotecnica

Sistemi Trifase Capitoli 4,5,6,7

Anno Accademico 2022-2023

prof. ing. Bruno Azzerboni

Fonti:

Lezioni di Elettrotecnica Generale - Giulio Battistini

Colombo Corsi Pisa

M. Fauri “Electrical Systems Engineering” Lezione 9

4 Misura delle potenze nei sistemi trifase

In un sistema trifase, esistono più metodi per la misura della potenza elettrica, sia essa attiva o reattiva. Per eseguirle si possono utilizzare appositi wattmetri trifase, oppure utilizzare dei wattmetri monofase con delle apposite inserzioni.

4.1 Misure con wattmetri monofase

A seconda dei dati e della potenza da misurare (attiva o reattiva) sono utilizzabili varie inserzioni; in certi casi potrebbe rendersi necessario eseguire alcuni calcoli con i valori letti sui wattmetri.

Inserzione aciclica

L'inserzione aciclica prevede l'uso di tre wattmetri, uno per linea, dove l'uscita della bobina amperometrica è sulla stessa linea della sua entrata, l'entrata della bobina voltmetrica è posta all'ingresso o all'uscita della bobina amperometrica, e l'uscita della bobina voltmetrica è posta sulla fase precedente secondo il senso ciclico (fig. 24). Il senso ciclico delle tre fasi, per convenzione, è nell'ordine 1,2,3 (oppure RST secondo un'altra convenzione); in caso di senso aciclico, quanto descritto va preso al contrario.

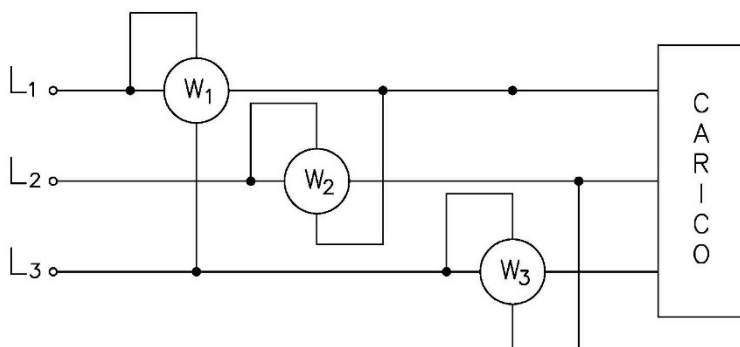


Figura 24

Inserzione ciclica

Nell'inserzione ciclica l'uscita della bobina amperometrica è posta sulla stessa fase dell'ingresso, l'ingresso della bobina voltmetrica sull'ingresso oppure sull'uscita della bobina amperometrica, e l'uscita della bobina voltmetrica è sulla fase che segue secondo il senso ciclico (fig. 25).

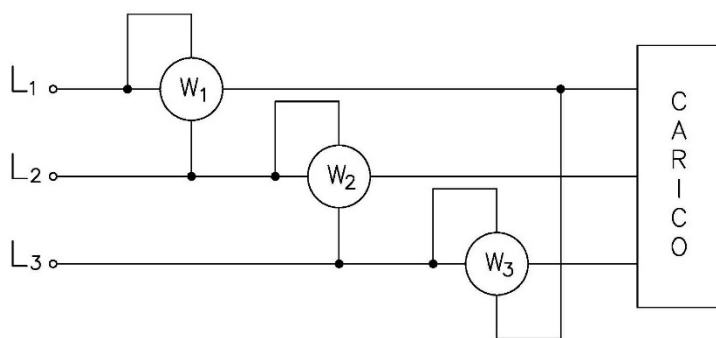


Figura 25

Inserzione in quadratura

Nell'inserzione in quadratura, l'ingresso della bobina amperometrica e la sua uscita sono sempre inseriti come nei metodi precedenti, ma l'entrata della bobina voltmetrica è inserita sulla fase successiva in senso ciclico, mentre l'uscita della bobina voltmetrica sulla fase precedente (fig. 26).

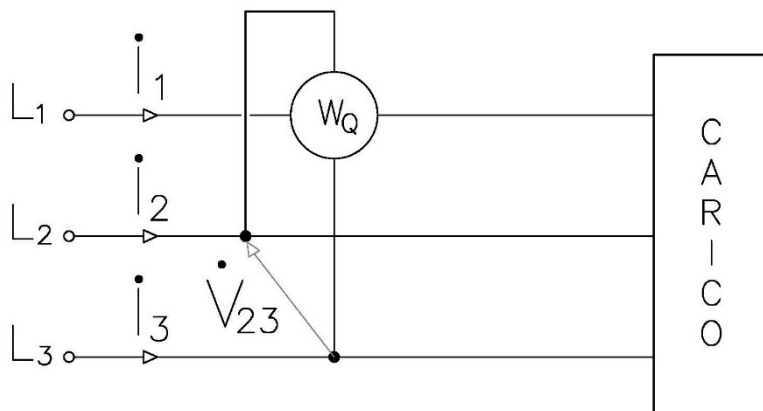


Figura 26

Inserzione Aron

L'inserzione Aron prevede l'uso di due soli wattmetri e consente di misurare, oltre la potenza attiva, anche la potenza reattiva se il sistema è equilibrato. Si inserisce la loro bobina amperometrica su due fasi, l'ingresso della bobina voltmetrica sull'ingresso o sull'uscita di quella amperometrica, mentre sulla terza fase, dove non è inserita la bobina amperometrica di alcun wattmetro, si inseriscono le uscite delle bobine voltmetriche.

Inserzione Righi

Nell'inserzione dell'ing Aldo Righi si utilizzano tre wattmetri: due di questi sono inseriti con metodo Aron e il terzo in quadratura. Esso consente di misurare la potenza attiva e reattiva nei sistemi sia equilibrati che in quelli squilibrati, a differenza del metodo Aron che consente di misurare l'energia reattiva solo sui carichi equilibrati. Per calcolare l'energia attiva si utilizza la stessa formula del metodo di Aron.

Si nota come il terzo wattmetro in quadratura serva solo ed esclusivamente per la misura della potenza reattiva.

Inserzione Barbagelata

L'inserzione dell'ing Angelo Barbagelata prevede l'uso di quattro wattmetri: due secondo l'inserzione Aron, uno seguendo l'inserzione ciclica e un altro quella aciclica. Questo metodo consente di misurare la potenza attiva e reattiva per qualsiasi tipo di carico, potenze totali e su ogni singola fase. Se il carico da misurare è costante nel tempo ed equilibrato o comunque approssimabile ad uno equilibrato, quindi quando le tre impedenze non differiscono di un valore elevato in modulo e in fase l'una rispetto all'altra, si può evitare l'uso di quattro wattmetri usandone solo due e commutando le tre fasi tramite un invertitore (o doppio deviatore).

Tendenzialmente quindi si preferisce usare l'inserzione Righi nelle misure da quadro, quando gli strumenti devono essere collegati in maniera stabile, mentre l'inserzione Barbagelata risulta particolarmente comoda con wattmetri portatili.

Misure con wattmetri trifase

Un wattmetro trifase raggruppa tutti gli equipaggi di tre wattmetri monofase inseriti su ciascuna linea, ottenendo così una lettura diretta della potenza; tuttavia ha lo svantaggio di non poter ricavare, tramite opportuni calcoli come è descritto sopra, la potenza reattiva e, per conseguenza, il fattore di potenza. È utilizzato quindi come strumento da quadro per avere la misura della potenza in transito su una determinata linea; sono disponibili sia strumenti per linee con neutro e linee senza neutro.

4.2 Misura delle potenze nei sistemi simmetrici ed equilibrati

Lo schema di principio per la misura delle potenze in un sistema trifase, discende immediatamente dalle loro definizioni:

$$\begin{aligned}P &= P_1 + P_2 + P_3 \\Q &= Q_1 + Q_2 + Q_3\end{aligned}$$

per cui le potenze trifase si possono misurare facendo la somma delle potenze misurate in ciascuna delle fasi.

Nel caso di sistemi trifase simmetrici ed equilibrati è sufficiente la misura delle potenze di una sola fase per dedurre, moltiplicando per tre, le potenze trifase:

$$\begin{aligned}P &= 3V_f I_f \cos \varphi \\Q &= 3V_f I_f \sin \varphi\end{aligned}$$

Se però la misura deve essere eseguita in base alle sole grandezze di linea prescindendo dal generatore e dal carico, si costruisce, con tre impedenze uguali, un baricentro O_b del sistema e si inserisce un wattmetro in modo che la bobina amperometrica sia percorsa dalla corrente di uno dei conduttori della linea e che alla bobina voltmetrica sia applicata la tensione baricentrica tra lo stesso conduttore ed il baricentro O_b .

È facile vedere (figura 27) che, qualunque sia il collegamento interfascico dei generatori, l'indicazione del wattmetro è:

$$W = V_f I_f \cos \varphi$$

e che, quindi, la potenza attiva trifase è data da:

$$P = 3W$$

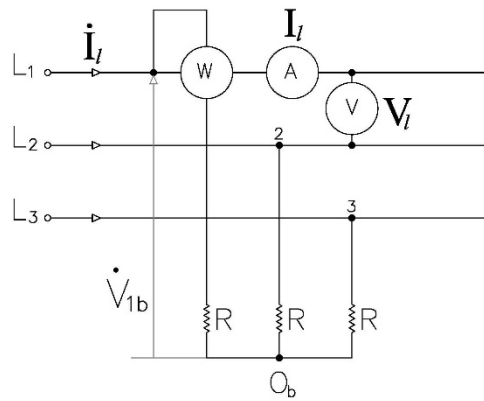
Per determinare poi la potenza reattiva trifase, basta misurare la tensione e la corrente di linea, con voltmetro e amperometro, ricavare la potenza apparente:

$$S = \sqrt{3}V_l I_l$$

e dedurre Q come:

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2}$$

$$W = V_b I_l \cos(\dot{V}_b \dot{I}_l)$$



Carico a stella

$$\dot{V}_b = \dot{V}_f$$

$$\dot{I}_l = \dot{I}_f$$

perciò

$$V_b = V_f$$

$$I_l = I_f$$

$$\widehat{V}_b \widehat{I}_l = \widehat{V}_f \widehat{I}_f = \varphi$$

quindi

$$W = V_b I_l \cos \widehat{V}_b \widehat{I}_l = V_f I_f \cos \varphi = \frac{P}{3}$$

In definitiva

$$P = 3W$$

Carico a triangolo

$$\dot{V}_b = \frac{1}{\sqrt{3}} \dot{V}_f e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

$$\dot{I}_l = \sqrt{3} \dot{I}_f e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

perciò

$$V_b = \frac{1}{\sqrt{3}} V_f$$

$$I_l = \sqrt{3} I_f$$

$$\widehat{V}_b \widehat{I}_l = \widehat{V}_f \widehat{I}_f = \varphi$$

quindi

$$W = V_b I_l \cos \widehat{V}_b \widehat{I}_l = \frac{1}{\sqrt{3}} V_f \sqrt{3} I_f \cos \varphi = V_f I_f \cos \varphi = \frac{P}{3}$$

Figura 27 - Metodo del wattmetro inserito tra una fase ed il baricentro (applicabile solo ai sistemi simmetrici ed equilibrati)

Sommando e sottraendo membro a membro le precedenti equazioni, si ottiene:

$$W_A + W_B = V_1 I_l \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi + V_1 I_l \frac{1}{2} \sin \varphi + V_1 I_l \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi - V_1 I_l \frac{1}{2} \sin \varphi = \sqrt{3} V_1 I_l \cos \varphi = P$$

$$W_A - W_B = V_1 I_l \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi + V_1 I_l \frac{1}{2} \sin \varphi - V_1 I_l \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi + V_1 I_l \frac{1}{2} \sin \varphi = V_1 I_l \sin \varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

Cioè, la somma delle indicazioni dei wattmetri, inseriti in Aron, è uguale alla potenza attiva trifase che fluisce nella linea, la loro differenza, moltiplicata per $\sqrt{3}$, è uguale alla potenza reattiva trifase.

$$P = W_A + W_B$$

$$Q = \sqrt{3}(W_A - W_b)$$

Se invece dei wattmetri inserissimo due varmetri, sempre in Aron, avremmo:

$$VAR_A = \dot{V}_{13} \wedge \dot{I}_1 = V_1 I_l \sin \alpha$$

$$VAR_B = \dot{V}_{23} \wedge \dot{I}_2 = V_1 I_l \sin \beta$$

$$VAR_A = \dot{V}_{13} \wedge \dot{I}_1 = V_1 I_l \sin \alpha = V_1 I_l \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right) = V_1 I_l \left(\sin \varphi \cos \frac{\pi}{6} - \cos \varphi \sin \frac{\pi}{6} \right) = V_1 I_l \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi - V_1 I_l \frac{1}{2} \cos \varphi$$

$$VAR_B = \dot{V}_{23} \wedge \dot{I}_2 = V_1 I_l \cos \beta = V_1 I_l \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) = V_1 I_l \left(\sin \varphi \cos \frac{\pi}{6} + \cos \varphi \sin \frac{\pi}{6} \right) = V_1 I_l \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi + V_1 I_l \frac{1}{2} \cos \varphi$$

$$VAR_A + VAR_B = V_1 I_l \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi - V_1 I_l \frac{1}{2} \cos \varphi + V_1 I_l \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi + V_1 I_l \frac{1}{2} \cos \varphi = \sqrt{3} V_1 I_l \sin \varphi = Q$$

$$VAR_A - VAR_B = V_1 I_l \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi - V_1 I_l \frac{1}{2} \cos \varphi - V_1 I_l \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi - V_1 I_l \frac{1}{2} \cos \varphi = -V_1 I_l \cos \varphi = -\frac{P}{\sqrt{3}}$$

Cioè, la somma delle indicazioni dei varmetri, inseriti in Aron, è uguale alla potenza reattiva trifase che fluisce nella linea, la loro differenza, moltiplicata per $\sqrt{3}$ e cambiata di segno, è uguale alla potenza attiva trifase.

$$Q = VAR_A + VAR_B$$

$$P = -\sqrt{3}(VAR_A - VAR_b)$$

È possibile, chiaramente solo ai fini del calcolo, calcolare la potenza complessa trifase immaginando di inserire in Aron due “vacmetri”, strumenti questi che chiaramente sono inventati, per cui

$$\bar{S}_A = \dot{V}_{13} \cdot \dot{I}_1$$

$$\bar{S}_B = \dot{V}_{23} \cdot \dot{I}_2$$

e, infine:

$$\bar{S} = \bar{S}_A + \bar{S}_B$$

È possibile misurare la potenza reattiva inserendo *un solo wattmetro in quadratura* secondo il seguente schema

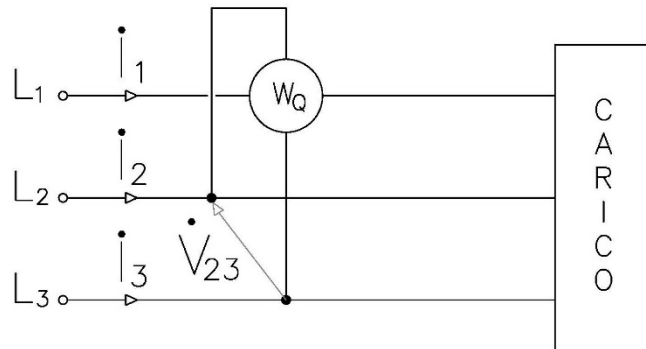


Figura 29

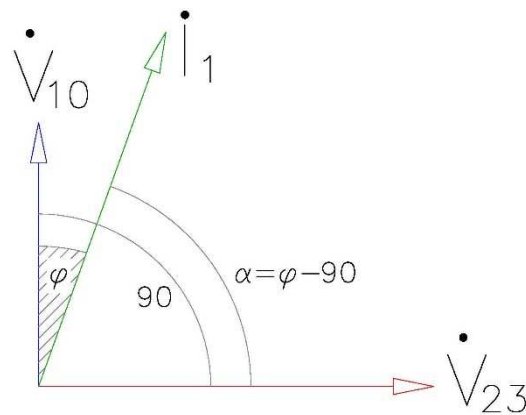


Figura 30

Perché un wattmetro possa dirsi inserito in quadratura, è necessario che la tensione concatenata applicata al suo equipaggio voltmetrico sia in ritardo di 90° rispetto alla tensione stellata che compete alla fase sulla quale è inserito l'equipaggio amperometrico. Nello schema di figura si è inserito il wattmetro sulla prima fase ed in effetti risulta essere \dot{V}_{23} in quadratura in ritardo rispetto a \dot{V}_{10} . È tuttavia possibile anche inserire il wattmetro sulla seconda o sulla terza fase, se viene inserito sulla seconda fase l'equipaggio voltmetrico deve essere collegato tra le fasi 3 ed 1, se viene inserito sulla terza fase l'equipaggio voltmetrico deve essere collegato tra le fasi 1 e 2 (si noti la regola per la quale l'equipaggio voltmetrico deve essere collegato tra le due fasi rimaste libere rispettando l'ordine ciclico delle fasi).

L'indicazione del wattmetro vale:

$$W_Q = \dot{V}_{23} \dot{I}_1 = VI \cos \alpha = VI \cos(\varphi - 90^\circ) = VI \cos(90^\circ - \varphi) = VI \cos 90^\circ \cos \varphi + VI \sin 90^\circ \sin \varphi = VI \sin \varphi$$

Risulta evidente che sarà:

$$Q = \sqrt{3}W_Q \text{ [VAR]}$$

4.2.1 Misura del fattore di potenza

Il fattore di potenza per un sistema trifase simmetrico ed equilibrato consiste nel coseno dell'angolo di sfasamento tra la corrente di linea e la tensione stellata. Tale angolo è lo stesso per tutte e tre le fasi, inoltre coincide con l'argomento dell'impedenza di carico.

Un primo modo di calcolarlo, dopo avere misurato le potenze attiva e reattiva, consiste nel fare riferimento *al triangolo delle potenze*:

$$\cos\varphi = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

Un secondo modo è quello di utilizzare la *formula di Block* che impiega il rapporto tra le indicazioni dei due wattmetri inseriti in Aron:

$$X = \frac{W_B}{W_A}$$
$$\cos\varphi = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \frac{W_A + W_B}{\sqrt{(W_A + W_B)^2 + [\sqrt{3}(W_A - W_B)]^2}} = \frac{W_A + W_B}{2\sqrt{W_A^2 - W_A W_B + W_B^2}}$$

dividendo al numeratore ed al denominatore per W_A e ricordando l'espressione di X si ha:

$$\cos\varphi = \frac{1 + \frac{W_B}{W_A}}{2\sqrt{1 - \frac{W_B}{W_A} + \left(\frac{W_B}{W_A}\right)^2}} = \frac{1 + X}{2\sqrt{1 - X + X^2}}$$

La funzione espressa dalla *formula di Block* ha la proprietà di rimanere invariata se si sostituisce X con $(1/X)$. Per tale motivo è indifferente calcolare X come $X = \frac{W_B}{W_A}$ oppure come $X = \frac{W_A}{W_B}$ approfittando di questa proprietà si è convenuto di calcolare X in modo tale che risulti $-1 \leq X \leq 1$ e di usare il *diagramma di Block* per conoscere il fattore di potenza noto che sia X (si usa la prima espressione nel caso di carichi ohmico-induttivi, la seconda nel caso di carichi ohmico-capacitivi).

La figura sottostante mostra il *diagramma di Block*:

$$\cos \varphi = f(x)$$

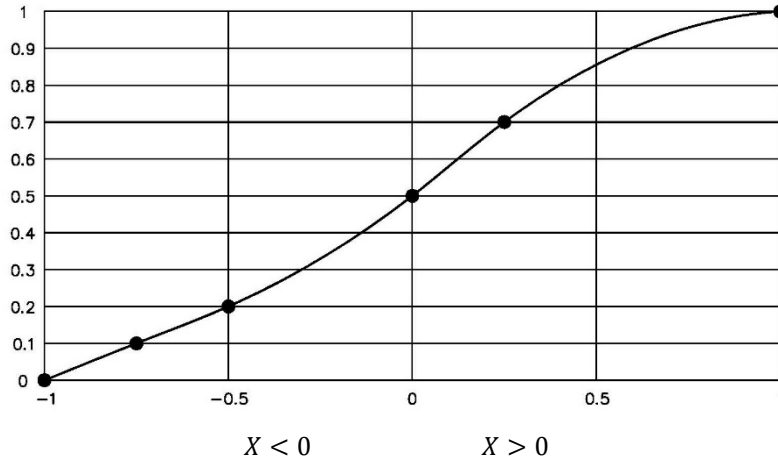


Figura 31

Osservazione: nel caso di sistemi simmetrici ed equilibrati è possibile dedurre immediatamente dalle indicazioni dei wattmetri inseriti secondo Aron la natura del carico (basta ricordare le espressioni di P e di Q, oltre che di W_A e W_B in funzione dell'angolo di sfasamento φ):

- se $W_A = W_B$ allora il carico è puramente ohmico, $X = 1$;
- se $W_A = -W_B$ allora il carico è puramente reattivo, $X = -1$;
- se $W_A > W_B$ allora il carico è ohmico-induttivo;
- se $W_A < W_B$ allora il carico è ohmico-capacitivo;
- se $W_A > 0$ e $W_B = 0$ allora $\varphi = 60^\circ$ ed il f.d.p. vale 0,5 in ritardo, $X = 0$;
- se $W_A > 0$ e $W_B < 0$ allora $\varphi > 60^\circ$ ed il f.d.p. è minore di 0,5 in ritardo, $X < 0$;
- se $W_B > 0$ e $W_A = 0$ allora $\varphi = -60^\circ$ ed il f.d.p. vale 0,5 in anticipo, $X = 0$;
- se $W_B > 0$ e $W_A < 0$ allora $\varphi < -60^\circ$ ed il f.d.p. è minore di 0,5 in anticipo, $X < 0$;
- se $W_A + W_B < 0$ allora vi è un errore nella inserzione oppure la potenza fluisce in senso opposto al previsto

4.3 Misura delle potenze nei sistemi a tre fili simmetrici e squilibrati

In questi sistemi risulta essere soddisfatto il primo principio di Kirchoff:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

ma le tre correnti non costituiscono più una terna simmetrica di vettori.

4.3.1 Misura di potenza attiva, inserzione Aron

È utile lo *schema di Aron*. Facendo riferimento alla figura e ricordando come le tensioni concatenate sono legate a quelle stellate, si ha:

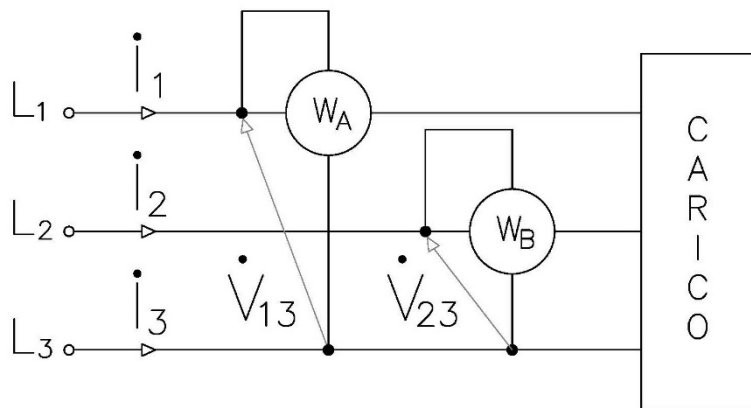


Figura 32

$$\begin{aligned} W_A + W_B &= \dot{V}_{13}xI_1 + \dot{V}_{23}xI_2 = (\dot{V}_{10} - \dot{V}_{30})xI_1 + (\dot{V}_{20} - \dot{V}_{30})xI_2 = \dot{V}_{10}xI_1 + \dot{V}_{20}xI_2 + \dot{V}_{30}x(-I_1 - I_2) \\ &= \dot{V}_{10}xI_1 + \dot{V}_{20}xI_2 + \dot{V}_{30}I_3 = P_1 + P_2 + P_3 = P [W] \end{aligned}$$

dove P_1 , P_2 e P_3 sono le potenze assorbite dalle singole fasi del carico mentre P è la potenza globalmente assorbita dal carico trifase. Quindi l'inserzione Aron permette di calcolare la potenza attiva in un sistema trifase qualsiasi (anche dissimmetrico e squilibrato, purché sia a tre fili) mediante la somma delle indicazioni dei due wattmetri.

4.3.2 Misura di potenza reattiva, inserzione Righi

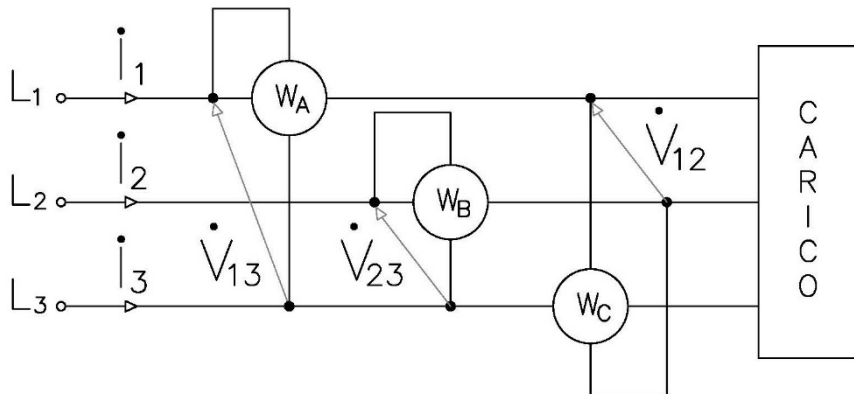


Figura 33

Nei sistemi simmetrici ma squilibrati è necessario l'impiego di tre wattmetri, i primi due inseriti secondo Aron ed il terzo inserito in quadratura sul filo rimasto libero.

Ciascun wattmetro indica:

$$\begin{aligned} W_A &= \dot{V}_{13} \times \dot{I}_1 = V I_1 \cos \alpha \\ W_B &= \dot{V}_{23} \times \dot{I}_2 = V I_2 \cos \beta \\ W_C &= \dot{V}_{12} \times \dot{I}_3 = V I_3 \cos \gamma \end{aligned}$$

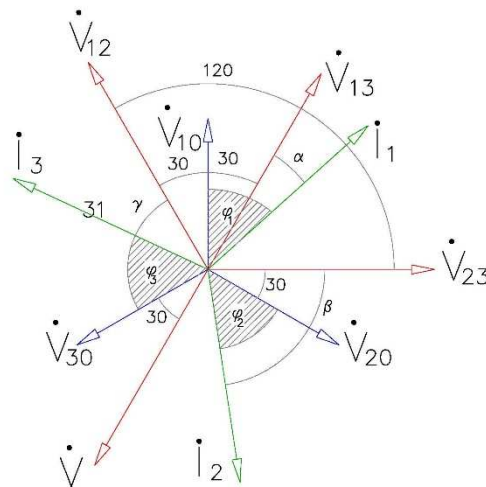


Figura 34

Per il primo principio di Kirchhoff deve essere nulla la somma dei tre vettori rappresentative delle correnti di linea, quindi sarà pure nulla la somma delle proiezioni dei vettori stessi su una generica direzione, ad esempio la direzione r del vettore rappresentante \dot{V}_{12} .

Le proiezioni valgono:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &\rightarrow I_1 \cos(60^\circ + \alpha) \\ \dot{I}_2 &\rightarrow I_2 \cos(120^\circ + \beta) \\ \dot{I}_3 &\rightarrow I_3 \cos \gamma = \frac{W_C}{V} \end{aligned}$$

Impongo che la somma sia nulla:

$$I_1 \cos(60^\circ + \alpha) + I_2 \cos(120^\circ + \beta) + \frac{W_C}{V} = 0$$

$$I_1 \left(\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \alpha \right) + I_2 \left(-\frac{1}{2} \cos \beta - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \beta \right) + \frac{W_C}{V} = 0$$

$$\frac{1}{2} (VI_1 \cos \alpha - VI_2 \cos \beta) - \frac{\sqrt{3}}{2} (VI_1 \operatorname{sen} \alpha + VI_2 \operatorname{sen} \beta) + W_C = 0$$

Si osserva che $VI_1 \cos \alpha = W_A$, $VI_2 \cos \beta = W_B$, e che $VI_1 \operatorname{sen} \alpha + VI_2 \operatorname{sen} \beta$ corrisponde alla somma delle indicazioni di *due varmetri inseriti secondo Aron* e, quindi, alla potenza reattiva Q impegnata dal carico.

Sostituendo:

$$\frac{1}{2} (W_A - W_B) - \frac{\sqrt{3}}{2} Q + W_C = 0 \rightarrow Q = \frac{W_A - W_B + 2W_C}{\sqrt{3}} \quad [VAR]$$

Risulta dimostrato come l'inserzione Righi permetta di misurare la potenza reattiva impegnata dal carico in un sistema simmetrico ma squilibrato. Ovviamente facendo la somma dei due wattmetri in Aron si ha pure la potenza attiva assorbita dal carico.

Osservazione: se il carico è equilibrato si ha $(W_A - W_B) = W_C$.

4.3.3 Misura di potenza reattiva, inserzione Barbagelata

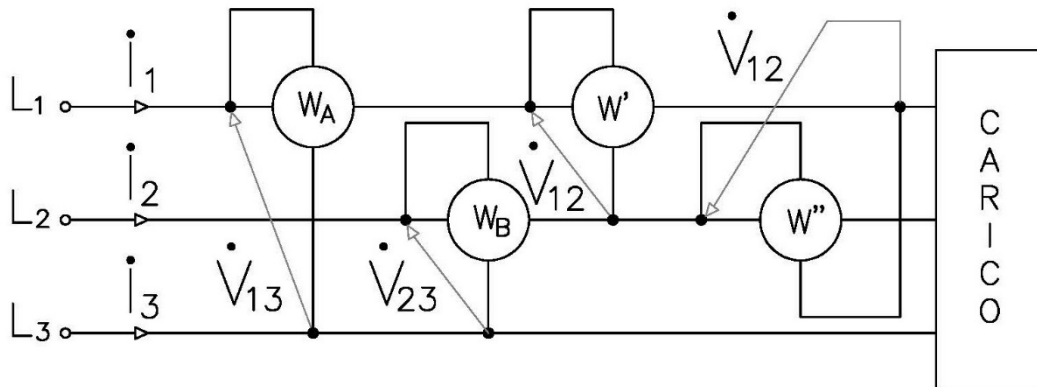


Figura 35

Viene anche chiamata *inserzione delle quattro letture* in quanto, come vedremo, mentre i wattmetri necessari possono anche essere solo due, le letture devono sempre essere quattro.

Si compone di due wattmetri inseriti secondo Aron e di due *wattmetri in inserzione simmetrica* (vale a dire disposti sugli stessi fili dei wattmetri in Aron e con gli equipaggi voltmetrici sottoposti a tensioni tra di loro opposte). Si dimostra che i due wattmetri in inserzione simmetrica sono del tutto equivalenti al singolo wattmetro in quadratura visto per l'inserzione Righi, infatti:

$$W'' + W' = \dot{V}_{21}x\dot{I}_2 - \dot{V}_{12}x\dot{I}_1 = -\dot{V}_{12}x\dot{I}_2 - \dot{V}_{12}x\dot{I}_1 = \dot{V}_{12}x(-\dot{I}_2 - \dot{I}_1) = \dot{V}_{12}x\dot{I}_3 = W_C$$

come volevasi dimostrare.

Quindi si può applicare il risultato già dimostrato per l'inserzione Righi:

$$Q = \frac{W_A - W_B + 2(W'' - W')}{\sqrt{3}} \text{ [VAR]}$$

Osservazione: se il carico rimane *costante nel tempo* è possibile effettuare la misura impiegando due soli wattmetri più un commutatore oppure un semplice tasto. Gli schemi sono i seguenti:

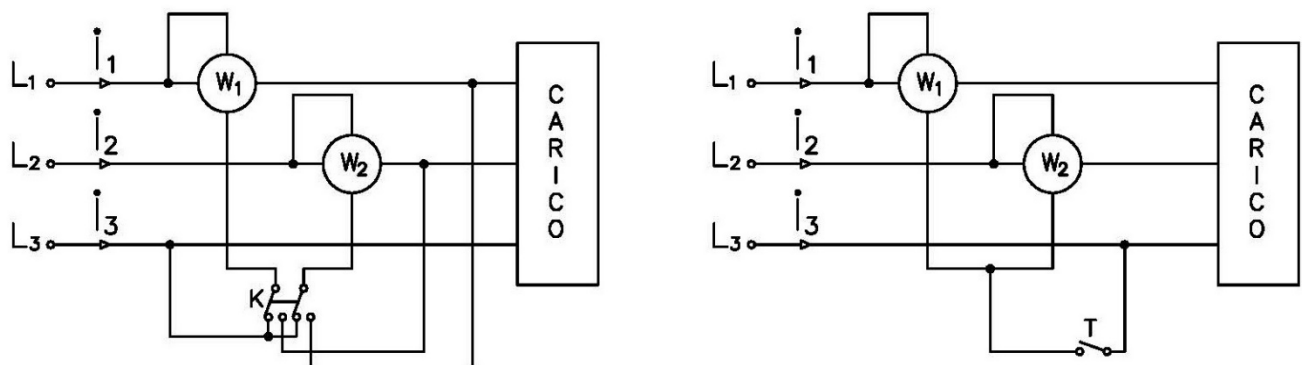


Figura 36

Nello schema di sinistra è mostrato l'impiego del commutatore: posizionato a sinistra determina l'inserzione secondo Aron dei due wattmetri, posizionato a destra determina l'inserzione simmetrica dei due wattmetri.

Nello schema di destra è mostrato l'impiego del tasto: chiuso determina l'inserzione secondo Aron dei due wattmetri, aperto determina l'inserzione simmetrica dei due wattmetri (in tale occasione, se i due wattmetri hanno uguale resistenza voltmetrica, si dovrà raddoppiare la loro costante strumentale poiché essendo essi in serie si avrà ai capi di ciascuno metà della tensione concatenata del sistema).

Qualunque sia lo schema prescelto, visto che la misura si deve effettuare in due distinti istanti, sarà necessario che rimangano costanti il carico e le tensioni di linea.

4.3.4 Misura del fattore di potenza

Il fattore di potenza per un sistema trifase simmetrico ma squilibrato consiste nel coseno dell'angolo di sfasamento globale. Per *sfasamento globale* φ_G si intende l'angolo del quale è necessario ruotare rigidamente la terna (non simmetrica) dei vettori rappresentanti le correnti di linea al fine di rendere massima la potenza attiva dell'intero sistema.

Un primo modo di calcolarlo, dopo avere misurato le potenze attiva e reattiva, consiste nel fare riferimento al *triangolo delle potenze*:

$$\cos\varphi_G = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

Un secondo modo è quello di utilizzare la *formula o il diagramma di Block* che impiega le indicazioni dei wattmetri inseriti:

$$\cos\varphi_G = \frac{1 + X}{2\sqrt{1 - X + X^2}} \text{ dove } \begin{cases} X = \frac{W_A + 2W_B - W_C}{2W_A + W_B + W_C} \text{ per l'inserzione Righi} \\ X = \frac{W_A + 2W_B - (W'' - W')}{2W_A + W_B + (W'' - W')} \text{ per l'inserzione Barbagelata} \end{cases}$$

Omettiamo la dimostrazione per le formule di X.

4.4 Misura delle potenze nei sistemi a quattro fili

4.4.1 Misura della potenza attiva

Se il sistema è simmetrico ed equilibrato si può porre un unico wattmetro su uno qualsiasi dei fili di fase e con l'equipaggio voltmetrico collegato tra il filo di fase ed il neutro. In tal modo si misura la potenza attiva assorbita da una fase, basterà moltiplicare per tre al fine di avere quella complessiva.

Se il sistema è squilibrato bisogna impiegare tre wattmetri inseriti sui tre fili di fase e con gli equipaggi voltmetrici collegati tra i corrispondenti fili di fase ed il neutro. In tal modo ciascun wattmetro indicherà la potenza assorbita dalla fase sulla quale esso è inserito e per avere la potenza totale basterà sommare le tre indicazioni. Tale inserzione rimane valida pure per i sistemi dissimmetrici.

Osservazione: si potrebbero anche inserire i tre wattmetri in modo tale che uno sia sul neutro. In tale caso tutti gli equipaggi voltmetrici dovrebbero fare capo al filo di fase rimasto libero. Ancora la somma delle tre indicazioni darebbe la potenza attiva totale, ma l'indicazione di ciascun wattmetro non coinciderebbe più con la potenza assorbita dalla fase sulla quale esso è inserito. Quanto detto sulla misura della potenza attiva deriva da un teorema generale detto *teorema di Blondel* per il quale il numero di letture wattmetriche necessarie per determinare la potenza attiva totale in un sistema alimentato con n fili è pari a $(n-1)$ purché gli equipaggi voltmetrici facciano tutti capo al filo non occupato dai wattmetri impiegati.

4.4.2 Misura della potenza reattiva, inserzione ciclica

Nel caso di *sistemi comunque dissimmetrici e squilibrati*, se si conosce a priori la natura (induttiva o capacitiva) del carico di ogni singola fase è possibile misurare separatamente la potenza reattiva delle singole fasi col metodo già visto per i circuiti monofasi. Basta inserire un wattmetro, un amperometro ed un voltmetro tra ciascuna fase ed il neutro. In tal modo si ha la misura diretta di P [W], V [V], I [A] e per determinare la potenza reattiva si calcolerà:

$$S = VxI \text{ [VA]} \text{ da cui } Q = \sqrt{S^2 - P^2} \text{ [VAR]}$$

Sommando algebricamente le potenze reattive delle tre fasi si ha quella totale.

Nella realtà i sistemi a quattro fili possono sempre ritenersi *simmetrici nelle tensioni*, anche se sono *squilibrati nel carico*. In tal caso la potenza reattiva si può agevolmente misurare con *tre wattmetri in inserzione ciclica*. Si tratta di collegare tre wattmetri in quadratura, ciascuno su di una fase, lasciando libero il neutro.

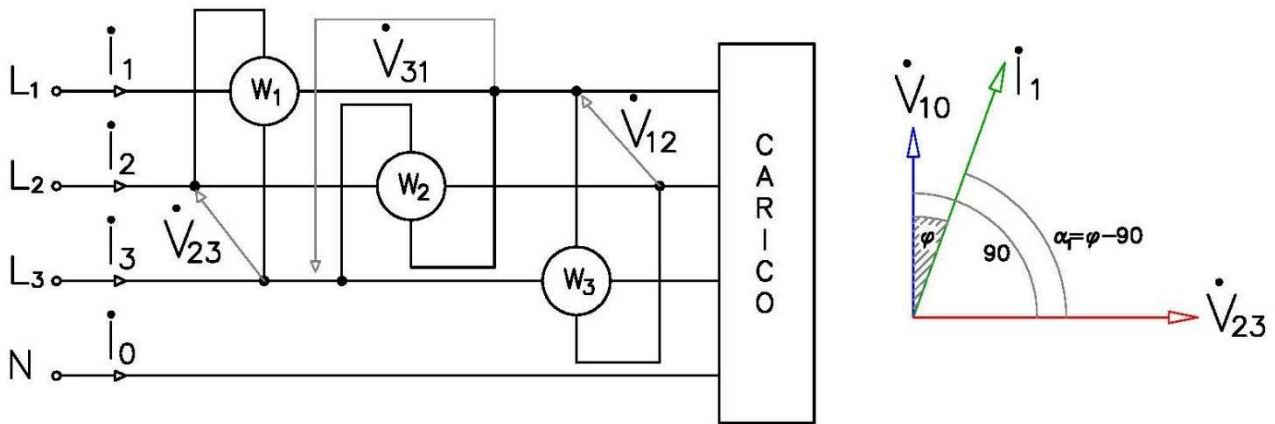


Figura 37

Il primo wattmetro in quadratura indica:

$$W_1 = \dot{V}_{23} \dot{I}_1 \cos \alpha_1 = V_{23} I_1 \cos \alpha_1 = V_{23} I_1 \cos(90^\circ - \varphi) = V_{23} I_1 \cos 90^\circ \cos \varphi + V_{23} I_1 \sin 90^\circ \sin \varphi = V_{23} I_1 \sin \varphi = \sqrt{3} V I_1 \sin \varphi = \sqrt{3} Q_1$$

dove Q_1 è la potenza reattiva impegnata dalla prima fase. Analogamente si dimostra che:

$$W_2 = \sqrt{3} Q_2, \quad W_3 = \sqrt{3} Q_3$$

Sommando le tre indicazioni si ottiene:

$$W_1 + W_2 + W_3 = \sqrt{3}(Q_1 + Q_2 + Q_3) \rightarrow Q = \frac{W_1 + W_2 + W_3}{\sqrt{3}} \text{ [VAR]}$$

4.5 Misura delle potenze nei sistemi dissimmetrici e squilibrati

Lo schema di principio per la misura delle potenze in un sistema trifase qualsiasi discende immediatamente dalle precedenti considerazioni. Inseriamo, infatti, in un sistema a tre fili, tre wattmetri come in figura 38 e creiamo con le tre bobine voltmetriche il centro stella O_s . In virtù del teorema di Aron, la somma delle indicazioni dei wattmetri è uguale alla potenza attiva trifase del sistema:

$$P = P_{w1} + P_{w2} + P_{w3} = \dot{V}_{1s} \cdot \dot{I}_{11} + \dot{V}_{2s} \cdot \dot{I}_{12} + \dot{V}_{3s} \cdot \dot{I}_{13}$$

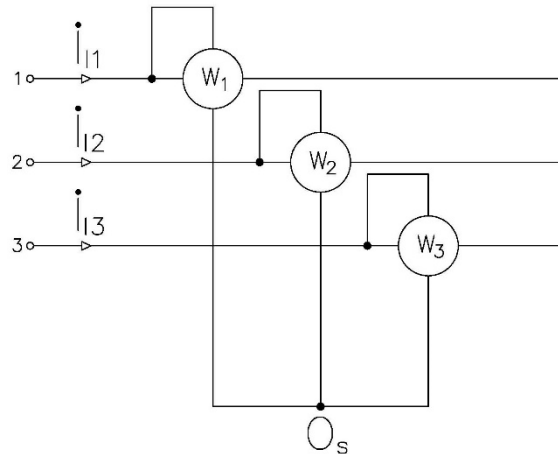


Figura 38 – Principio generale di misura

È chiaro che questo metodo è valido anche per la misura nei sistemi a quattro fili quando si faccia coincidere O_s con il filo neutro.

In pratica, nei sistemi a tre fili la misura si esegue mediante l'uso di soli due wattmetri; facendo infatti coincidere il centro stella O_s con uno dei due fili, ad esempio il filo 2, si ha (figura 39):

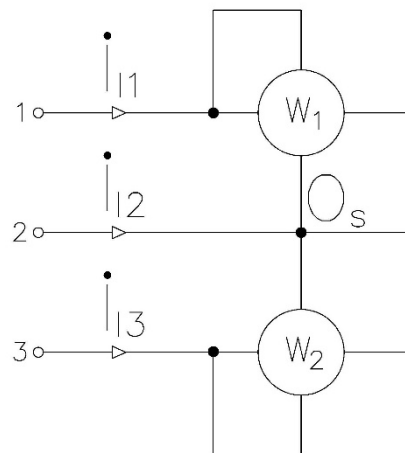


Figura 39 – Sistema Aron

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1s} &= \dot{V}_{12} \\ \dot{V}_{2s} &= 0 \\ \dot{V}_{3s} &= \dot{V}_{32} = -\dot{V}_{23} \end{aligned}$$

E quindi la potenza trifase P della linea è espressa da:

$$P = \dot{V}_{1s} \cdot \dot{I}_{11} + \dot{V}_{2s} \cdot \dot{I}_{12} + \dot{V}_{3s} \cdot \dot{I}_{13} = \dot{V}_{12} \cdot \dot{I}_{11} + \dot{V}_{32} \cdot \dot{I}_{13}$$

I due prodotti scalari corrispondono proprio alle indicazioni dei wattmetri, avremo quindi:

$$P = P_{w1} + P_{w2}$$

Pertanto può concludersi *che in un qualsiasi sistema a tre fili, la somma delle indicazioni dei due wattmetri inseriti con il sistema Aron, è uguale alla potenza attiva trifase della linea.*

La misura della potenza mediante Aron si esegue dunque in maniera identica sia per i sistemi simmetrici ed equilibrati, sia per quelli dissimmetrici e squilibrati a tre fili. Questa identità riguarda **solo** la potenza attiva, perché nei sistemi dissimmetrici e squilibrati le indicazioni dei due wattmetri non sono sufficienti per misurare la potenza reattiva. Sia quest'ultima, sia la potenza complessa, possono però misurarsi in Aron con due varmetri e con due vacmetri.

In generale possiamo affermare che per misurare la potenza attiva, la potenza reattiva e la potenza complessa in sistemi ad n fili, possiamo utilizzare, grazie ad Aron, $n-1$ wattmetri, $n-1$ varmetri ed $n-1$ vacmetri.

4.6 Gli errori nelle misure di potenza attiva trifase

Gli errori che si commettono nella misura della potenza attiva sono di tre tipi: a) *errori di autoconsumo*, b) *errori di fase*, c) *errori strumentali*. Gli errori del tipo a) e b) sono errori sistematici che, quindi, possono essere determinati con precisione e sottratti alla potenza misurata lasciando come unica incertezza quella dovuta agli errori strumentali. Normalmente quando si devono scegliere gli strumenti per effettuare la misura di potenza attiva e reattiva si fa in modo di inserire nel circuito di misura wattmetri identici, di adottare l'inserzione con le voltmetriche a valle essendo le resistenze degli equipaggi voltmetrici note con maggiore precisione di quelle amperometriche (così da poter correggere con più precisione gli errori d'autoconsumo), di non alterare la simmetria del sistema (per esempio inserendo l'amperometro sul filo lasciato libero dai wattmetri in Aron e scegliendo tale amperometro di caratteristiche uguali alle amperometriche dei wattmetri).

Discutiamo ora gli errori facendo riferimento alla *misura di potenza mediante l'inserzione Aron* in un sistema simmetrico ed equilibrato a tre fili, nel quale *le voltmetriche siano inserite a valle*.

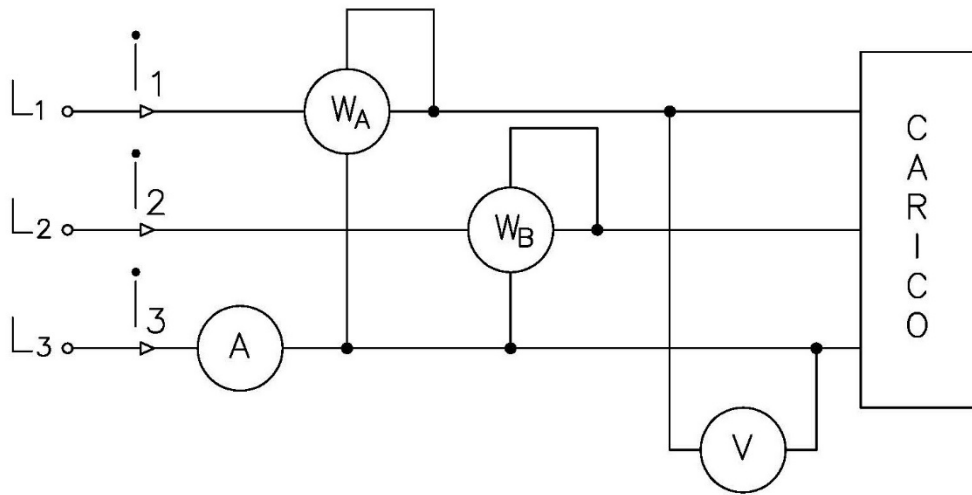


Figura 40

Per quanto riguarda gli errori d'autoconsumo bisogna tenere conto della potenza dissipata dagli equipaggi voltmetrici a valle di ciascun wattmetro:

$$P_{AA} = \frac{V^2}{R_{VWA}} + \frac{V^2}{R_{VV}} \text{ [W]}, \quad P_{AB} = \frac{V^2}{R_{VWB}} \text{ [W]} \rightarrow \begin{cases} W'_A = W_A - P_{AA} \text{ [W]} \\ W'_B = W_B - P_{AB} \text{ [W]} \end{cases}$$

$$P = W'_A + W'_B \text{ [W]}, \quad Q = \sqrt{3}(W'_A - W'_B) \text{ [VAR]}$$

dove R_{VWA} [Ω], R_{VWB} [Ω], R_{VV} [Ω] sono le resistenze interne voltmetriche degli strumenti inseriti mentre W_A [W], W_B [W], V [V] sono le indicazioni dei wattmetri e del voltmetro e P_{AA} [W], P_{AB} [W] sono gli autoconsumi che riguardano ciascun wattmetro.

Nel caso in cui non si corregga l'errore, i valori assoluto e relativo dell'errore di autoconsumo che si commettono valgono:

$$\Delta P_A = P_{AA} + P_{AB} [W], \quad e_A \% = 100 \frac{\Delta P_A}{W_A + W_B}$$

Per quanto riguarda gli errori di fase, se ε_A [rad], ε_B [rad] sono gli errori d'angolo dei due wattmetri impiegati, gli errori di fase commessi da ciascun wattmetro valgono:

$$e_{FA} \% \cong 100 \varepsilon_A \tan \alpha, \quad e_{FB} \% \cong 100 \varepsilon_B \tan \beta$$

dove α e β sono gli angoli di sfasamento interni di ciascun wattmetro, facilmente calcolabili conoscendo la potenza indicata da ciascun wattmetro ed i valori di tensione e corrente applicati.

Gli errori di fase assoluto e relativo valgono complessivamente:

$$\Delta P_F = \frac{e_{FA} \% W_A}{100} + \frac{e_{FB} \% W_B}{100} [W] \quad e_F \% = 100 \frac{\Delta P_F}{W_A + W_B}$$

Volendo tenere conto dell'errore di fase, il suo valore assoluto andrebbe sottratto dalla somma delle indicazioni dei wattmetri.

Per quanto riguarda gli errori strumentali, se Cl_A e Cl_B sono le classi di precisione e P_{NA} [W], P_{NB} [W] sono le portate nominali dei due wattmetri impiegati, il valore assoluto ed il valore relativo dell'errore strumentale complessivo valgono:

$$|\Delta P_S| = Cl_A \frac{P_{NA}}{100} + Cl_B \frac{P_{NB}}{100} [W] \quad |e_S \%| = 100 \frac{|\Delta P_S|}{W_A + W_B}$$

Tuttavia non è possibile correggere questo errore visto che non se ne conosce il segno.

Il grado di approssimazione complessivo che si può attribuire alla misura di potenza trifase è dato dalla somma aritmetica dei valori assoluti di tutti gli errori sopra definiti:

$$|\Delta P| = |\Delta P_A| + |\Delta P_F| + |\Delta P_S| [W]$$

Nelle misure su linee trifasi il caso peggiore si verifica misurando la potenza attiva per un carico fortemente reattivo col metodo dei due wattmetri in Aron. Questo perché la potenza è calcolata per differenza aritmetica fra due indicazioni poco diverse tra di loro. Per misure di questo tipo è preferibile perciò ricorrere al *metodo dei tre wattmetri inseriti su centro stella artificiale* (usando magari wattmetri per basso f.d.p.)

5 Rifasamento nei sistemi trifase

Rifasare un carico trifase vuol dire inserire in parallelo al carico una batteria di condensatori in modo che la potenza reattiva complessiva del carico e dei condensatori soddisfi la condizione:

$$\tan \varphi' = \frac{Q'_g}{P_g} = \frac{Q_{CA} - Q_{Cond}}{P_{CA}}$$

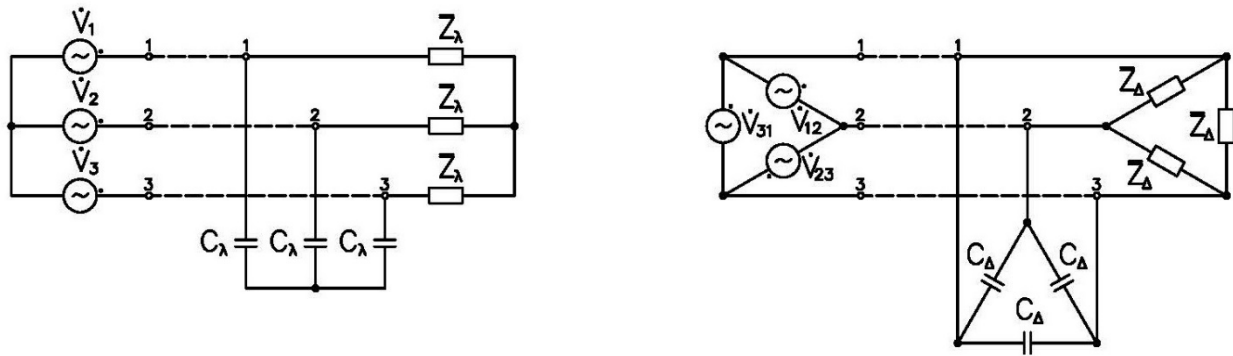


Figura 41

Si presentano due casi:

- I. Carico equilibrato, collegato a stella (λ) o a triangolo (Δ), e tensioni simmetriche o dissimmetriche

- Tensioni dissimmetriche

$$P_{CA} = \frac{R_\lambda}{Z_\lambda^2} (V_{1b}^2 + V_{2b}^2 + V_{3b}^2) = \frac{R_\Delta}{Z_\Delta^2} (V_{12}^2 + V_{23}^2 + V_{31}^2)$$

$$Q_{CA} = \frac{X_\lambda}{Z_\lambda^2} (V_{1b}^2 + V_{2b}^2 + V_{3b}^2) = \frac{X_\Delta}{Z_\Delta^2} (V_{12}^2 + V_{23}^2 + V_{31}^2)$$

$$Q_{Cond} = \omega C_\lambda (V_{1b}^2 + V_{2b}^2 + V_{3b}^2) = \omega C_\Delta (V_{12}^2 + V_{23}^2 + V_{31}^2)$$

Quindi

$$\tan \varphi' = \frac{\frac{X_\lambda}{Z_\lambda^2} (V_{1b}^2 + V_{2b}^2 + V_{3b}^2) - \omega C_\lambda (V_{1b}^2 + V_{2b}^2 + V_{3b}^2)}{\frac{R_\lambda}{Z_\lambda^2} (V_{1b}^2 + V_{2b}^2 + V_{3b}^2)} = \frac{\frac{X_\lambda}{Z_\lambda^2} - \omega C_\lambda}{\frac{R_\lambda}{Z_\lambda^2}}$$

$$\tan \varphi' = \frac{\frac{X_\Delta}{Z_\Delta^2} (V_{12}^2 + V_{23}^2 + V_{31}^2) - \omega C_\Delta (V_{12}^2 + V_{23}^2 + V_{31}^2)}{\frac{R_\Delta}{Z_\Delta^2} (V_{12}^2 + V_{23}^2 + V_{31}^2)} = \frac{\frac{X_\Delta}{Z_\Delta^2} - \omega C_\Delta}{\frac{R_\Delta}{Z_\Delta^2}}$$

In definitiva sia che i condensatori siano a stella o a triangolo, il valore della loro capacità è indipendente dalle tensioni.

➤ Tensioni simmetriche

$$P_{CA} = 3 \frac{R_\lambda}{Z_\lambda^2} (V_\lambda^2) = 3 \frac{R_\Delta}{Z_\Delta^2} (V_\Delta^2)$$

$$Q_{CA} = 3 \frac{X_\lambda}{Z_\lambda^2} (V_\lambda^2) = 3 \frac{X_\Delta}{Z_\Delta^2} (V_\Delta^2)$$

$$Q_{Cond} = 3\omega C_\lambda V_\lambda^2 = 3\omega C_\Delta V_\Delta^2$$

Quindi

$$\tan \varphi' = \frac{3 \frac{X_\lambda}{Z_\lambda^2} (V_\lambda^2) - 3\omega C_\lambda V_\lambda^2}{3 \frac{R_\lambda}{Z_\lambda^2} (V_\lambda^2)} = \frac{\frac{X_\lambda}{Z_\lambda^2} - \omega C_\lambda}{\frac{R_\lambda}{Z_\lambda^2}}$$

$$\tan \varphi' = \frac{3 \frac{X_\Delta}{Z_\Delta^2} (V_\Delta^2) - 3\omega C_\Delta V_\Delta^2}{3 \frac{R_\Delta}{Z_\Delta^2} (V_\Delta^2)} = \frac{\frac{X_\Delta}{Z_\Delta^2} - \omega C_\Delta}{\frac{R_\Delta}{Z_\Delta^2}}$$

Anche in questo caso il valore della capacità dei condensatori di rifasamento è indipendente dalle tensioni.

2. Carico squilibrato (conviene sempre riportare il carico con collegamento a triangolo, rifasare con condensatori pure a triangolo) e tensioni simmetriche o dissimmetriche

➤ Tensioni dissimmetriche

$$P_{CA} = R_{12} \left(\frac{V_{12}}{Z_{12}}\right)^2 + R_{23} \left(\frac{V_{23}}{Z_{23}}\right)^2 + R_{31} \left(\frac{V_{31}}{Z_{31}}\right)^2$$

$$Q_{CA} = X_{12} \left(\frac{V_{12}}{Z_{12}}\right)^2 + X_{23} \left(\frac{V_{23}}{Z_{23}}\right)^2 + X_{31} \left(\frac{V_{31}}{Z_{31}}\right)^2$$

$$Q_{Cond} = \omega C_\Delta (V_{12}^2 + V_{23}^2 + V_{31}^2)$$

Quindi

$$\tan \varphi' = \frac{X_{12} \left(\frac{V_{12}}{Z_{12}}\right)^2 + X_{23} \left(\frac{V_{23}}{Z_{23}}\right)^2 + X_{31} \left(\frac{V_{31}}{Z_{31}}\right)^2 - \omega C_\Delta (V_{12}^2 + V_{23}^2 + V_{31}^2)}{R_{12} \left(\frac{V_{12}}{Z_{12}}\right)^2 + R_{23} \left(\frac{V_{23}}{Z_{23}}\right)^2 + R_{31} \left(\frac{V_{31}}{Z_{31}}\right)^2}$$

In questo caso il valore di C_Δ dipende dal valore delle tensioni.

➤ Tensioni simmetriche ($V_{12} = V_{23} = V_{31} = V$)

$$P_{CA} = R_{12} \left(\frac{V}{Z_{12}}\right)^2 + R_{23} \left(\frac{V}{Z_{23}}\right)^2 + R_{31} \left(\frac{V}{Z_{31}}\right)^2$$

$$Q_{CA} = X_{12} \left(\frac{V}{Z_{12}}\right)^2 + X_{23} \left(\frac{V}{Z_{23}}\right)^2 + X_{31} \left(\frac{V}{Z_{31}}\right)^2$$

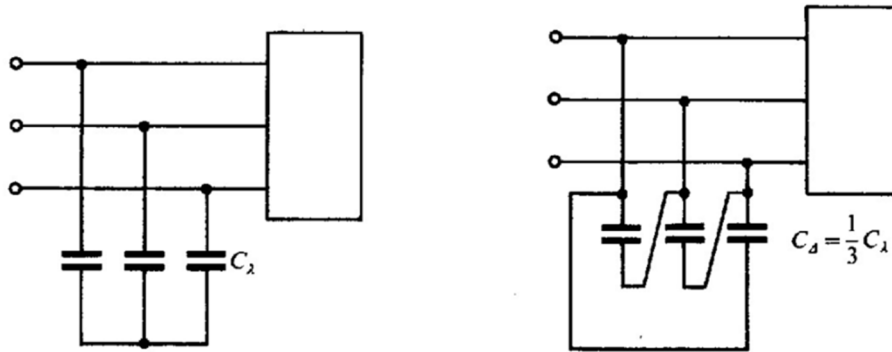
$$Q_{Cond} = 3\omega C_\Delta V^2$$

Quindi

$$\tan \varphi' = \frac{X_{12} \left(\frac{V}{Z_{12}}\right)^2 + X_{23} \left(\frac{V}{Z_{23}}\right)^2 + X_{31} \left(\frac{V}{Z_{31}}\right)^2 - 3\omega C_\Delta V^2}{R_{12} \left(\frac{V}{Z_{12}}\right)^2 + R_{23} \left(\frac{V}{Z_{23}}\right)^2 + R_{31} \left(\frac{V}{Z_{31}}\right)^2} = \frac{\frac{X_{12}}{Z_{12}^2} + \frac{X_{23}}{Z_{23}^2} + \frac{X_{31}}{Z_{31}^2} - 3\omega C_\Delta}{\frac{R_{12}}{Z_{12}^2} + \frac{R_{23}}{Z_{23}^2} + \frac{R_{31}}{Z_{31}^2}}$$

Anche in questo caso il valore della capacità dei condensatori di rifasamento è indipendente dalle tensioni.

Come qualsiasi altro carico, in regime sinusoidale trifase un banco di rifasamento può presentare due configurazioni, secondo che i banchi delle singole fasi siano collegati a stella o a triangolo.



Nel caso di collegamento a stella, i condensatori sono sottoposti alla tensione di fase, che è $\sqrt{3}$ volte minore della tensione di linea, mentre nel caso di collegamento a triangolo i condensatori sono sottoposti all'intera tensione di linea. Si modificano di conseguenza le espressioni delle potenze reattive impegnate nelle due configurazioni. Nel caso del collegamento a stella, la potenza reattiva è data da

$$Q_n = 3 \left(\frac{V_n}{\sqrt{3}} \right)^2 \omega \cdot C_\lambda = V_n^2 \cdot \omega \cdot C_\lambda \quad \text{da cui} \quad C_\lambda = \frac{Q_n}{V_n^2 \cdot \omega}$$

Nel caso del collegamento a triangolo, la potenza reattiva si calcola invece

$$Q_n = 3 \cdot V_n^2 \cdot \omega \cdot C_\Delta \quad \text{da cui} \quad C_\Delta = \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_n}{V_n^2 \cdot \omega}$$

Si verifica immediatamente che a parità di potenza reattiva il collegamento a stella richiede una capacità 3 volte maggiore che nel collegamento a triangolo.

$$C_\lambda = 3 \cdot C_\Delta$$

Nel collegamento a stella ciascun condensatore è sottoposto alla tensione stellata V_λ , nel collegamento a triangolo, invece, sul condensatore insiste la tensione concatenata $V_\Delta = \sqrt{3} \cdot V_\lambda$, quindi

$$\begin{array}{l} \text{Collegamento a stella} \\ \text{Collegamento a triangolo} \end{array} \quad \begin{cases} V_\lambda \\ C_\lambda = 3 \cdot C_\Delta \\ \\ V_\Delta = \sqrt{3} \cdot V_\lambda \\ C_\Delta = \frac{1}{3} \cdot C_\lambda \end{cases}$$

Quindi nel collegamento a stella sul condensatore insiste minore tensione e, quindi, al condensatore necessita minore isolamento e, di conseguenza, il condensatore ha un costo minore; in conclusione, quindi, è per questo motivo che in media o alta tensione si preferisce il collegamento a stella.

Alla luce di queste considerazioni, si preferisce adottare una configurazione a triangolo nel caso di rifasamento in bassa tensione, mentre si riserva la configurazione a stella nel caso di rifasamento in media o alta tensione.

6 Convenienza dell'utilizzo dei sistemi trifase

Oltre alla fondamentale ragione della scelta del sistema trifase che consiste nella possibilità di generare un campo rotante e di rendere più semplici e con migliori caratteristiche di funzionamento motori e generatori, sincroni ed asincroni, una linea trifase risulta anche economicamente conveniente per quanto riguarda l'impiego di rame

Se occorre, infatti, trasmettere una stessa potenza attiva con la medesima tensione, con lo stesso fattore di potenza e con la stessa densità di corrente nei conduttori, il volume del conduttore impiegato per la linea trifase è inferiore rispetto a quello impiegato per la linea monofase. In particolare si ha che il volume di rame necessario per la linea trifase è 0,866 volte il volume necessario della corrispondente linea monofase. Si risparmia pertanto circa il 14% di rame.

Indicando con:

- P_3 la potenza attiva trifase;
- P_1 la potenza attiva monofase;
- I_3 il valore efficace della corrente di linea nel sistema trifase;
- I_1 il valore efficace della corrente di linea nel sistema monofase

abbiamo

$$\begin{aligned}P_3 &= \sqrt{3}V_l I_3 \cos \varphi \\P_1 &= V_l I_1 \cos \varphi\end{aligned}$$

affinché le due potenze siano uguali, a parità di V_l e $\cos \varphi$, deve essere

$$\sqrt{3}V_l I_3 \cos \varphi = V_l I_1 \cos \varphi \rightarrow I_3 = \frac{I_1}{\sqrt{3}}$$

do avendo lavorare a parità di densità di corrente e quindi con $\delta_3 = \delta_1 = \delta$, essendo:

$$\begin{aligned}\delta_3 &= \frac{I_3}{S_3} \\ \delta_1 &= \frac{I_1}{S_1}\end{aligned}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}S_3 &= \frac{I_3}{\delta} = \frac{I_3}{\delta} \\ S_1 &= \frac{I_1}{\delta} = \frac{I_1}{\delta}\end{aligned}$$

da cui

$$\frac{S_3}{S_1} = \frac{\frac{I_3}{\delta}}{\frac{I_1}{\delta}} = \frac{I_3}{I_1} \times \frac{\delta}{\delta} = \frac{I_3}{I_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.577$$

Quindi, indicando con L la lunghezza della linea, si ottiene:

$$\begin{aligned}V_3 &= 3xS_3xL \\ V_1 &= 2xS_1xL\end{aligned}$$

da cui

$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{3S_3}{2S_1} = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$$

7 *Accoppiamenti mutui nei sistemi trifase*

Caso generale

Sia dato il seguente sistema trifase, fig. 42:

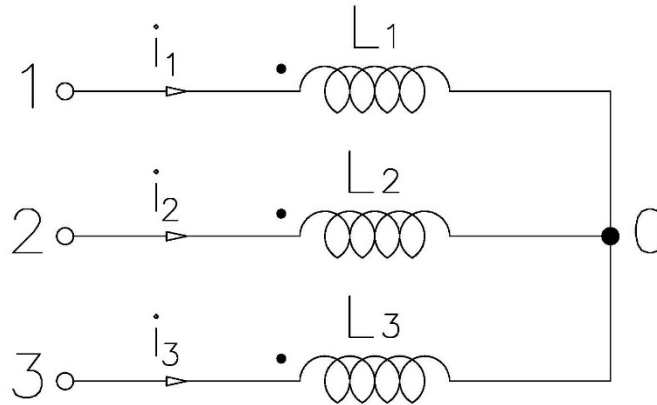


Figura 42

costituito da tre induttori di induttanza L_1 , L_2 ed L_3 , accoppiati mutuamente con coefficienti di mutua M_{12} , M_{23} ed M_{31} ; i coefficienti di mutua, come ben sappiamo, sono affetti dal proprio segno.

Scriviamo le espressioni istantanee delle tensioni stellate:

$$\begin{aligned} v_{10} + e_{L1} + e_{M21} + e_{M31} &= 0 \\ v_{20} + e_{L2} + e_{M12} + e_{M32} &= 0 \\ v_{30} + e_{L3} + e_{M13} + e_{M23} &= 0 \end{aligned}$$

e considerando che con i versi assunti delle correnti, cioè tutte entranti dai morsetti contrassegnati con i pallini, le mutue sono positive, abbiamo:

$$\begin{aligned} v_{10} - L_1 \frac{di_1}{dt} - M_{21} \frac{di_2}{dt} - M_{31} \frac{di_3}{dt} &= 0 \\ v_{20} - L_2 \frac{di_2}{dt} - M_{12} \frac{di_1}{dt} - M_{32} \frac{di_3}{dt} &= 0 \\ v_{30} - L_3 \frac{di_3}{dt} - M_{13} \frac{di_1}{dt} - M_{23} \frac{di_2}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

cioè:

$$\begin{aligned} v_{10} &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{21} \frac{di_2}{dt} + M_{31} \frac{di_3}{dt} \\ v_{20} &= L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{12} \frac{di_1}{dt} + M_{32} \frac{di_3}{dt} \\ v_{30} &= L_3 \frac{di_3}{dt} + M_{13} \frac{di_1}{dt} + M_{23} \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$

Ipotizziamo ora di essere a regime permanente sinusoidale e quindi le nostre equazioni diventano:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{10} &= j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M_{21} \dot{I}_2 + j\omega M_{31} \dot{I}_3 \\ \dot{V}_{20} &= j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M_{12} \dot{I}_1 + j\omega M_{32} \dot{I}_3 \\ \dot{V}_{30} &= j\omega L_3 \dot{I}_3 + j\omega M_{13} \dot{I}_1 + j\omega M_{23} \dot{I}_2 \end{aligned}$$

e queste equazioni sono identiche a quelle che scriveremmo se avessimo da analizzare il seguente sistema elettrico:

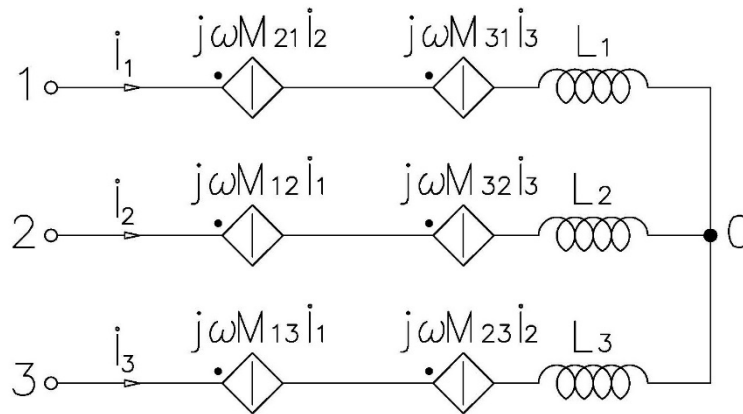


Figura 43

Infatti applicando la legge di Ohm generalizzata, otteniamo:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{10} - j\omega M_{21} \dot{I}_2 - j\omega M_{31} \dot{I}_3 - j\omega L_1 \dot{I}_1 &= 0 \\ \dot{V}_{20} - j\omega M_{12} \dot{I}_1 - j\omega M_{32} \dot{I}_3 - j\omega L_2 \dot{I}_2 &= 0 \\ \dot{V}_{30} - j\omega M_{13} \dot{I}_1 - j\omega M_{23} \dot{I}_2 - j\omega L_3 \dot{I}_3 &= 0 \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{10} &= j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M_{21} \dot{I}_2 + j\omega M_{31} \dot{I}_3 \\ \dot{V}_{20} &= j\omega M_{12} \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M_{32} \dot{I}_3 \\ \dot{V}_{30} &= j\omega M_{13} \dot{I}_1 + j\omega M_{23} \dot{I}_2 + j\omega L_3 \dot{I}_3 \end{aligned}$$

e ponendo:

$$\begin{aligned} X_1 &= \omega L_1 & X_2 &= \omega L_2 & X_3 &= \omega L_3 \\ X_{12} = X_{21} &= \omega M_{12} & X_{23} = X_{32} &= \omega M_{23} & X_{31} = X_{13} &= \omega M_{31} \end{aligned}$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{10} &= jX_1 \dot{I}_1 + jX_{12} \dot{I}_2 + jX_{31} \dot{I}_3 \\ \dot{V}_{20} &= jX_{12} \dot{I}_1 + jX_2 \dot{I}_2 + jX_{23} \dot{I}_3 \\ \dot{V}_{30} &= jX_{31} \dot{I}_1 + jX_{23} \dot{I}_2 + jX_3 \dot{I}_3 \end{aligned}$$

Quindi la figura 43 la possiamo ora ridisegnare nel seguente modo:

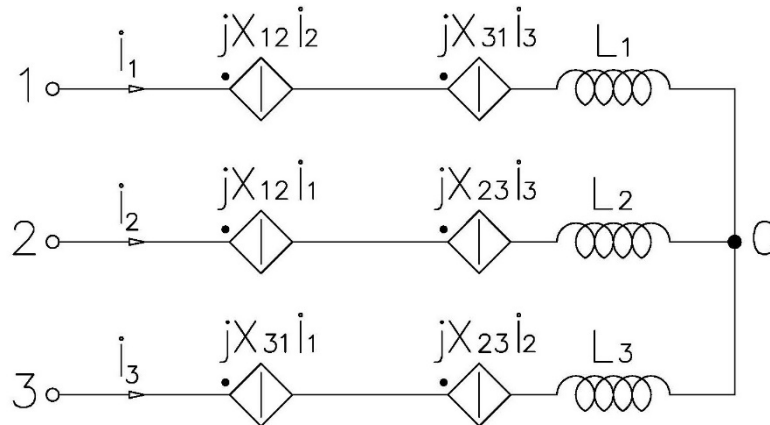


Figura 44 – Circuito equivalente con generatori controllati

Riferendoci al sistema equivalente di figura 44, calcoliamo le tensioni concatenate \dot{V}_{12} e \dot{V}_{23} :

$$\begin{aligned}\dot{V}_{12} &= \dot{V}_{10} - \dot{V}_{20} = jX_{12}\dot{I}_2 + jX_{31}\dot{I}_3 + jX_1\dot{I}_1 - (jX_{12}\dot{I}_1 + jX_{23}\dot{I}_3 + jX_2\dot{I}_2) \\ &= jX_{12}\dot{I}_2 + jX_{31}\dot{I}_3 + jX_1\dot{I}_1 - jX_{12}\dot{I}_1 - jX_{23}\dot{I}_3 - jX_2\dot{I}_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_{32} &= \dot{V}_{30} - \dot{V}_{20} = jX_{31}\dot{I}_1 + jX_{23}\dot{I}_2 + jX_3\dot{I}_3 - (jX_{12}\dot{I}_1 + jX_{23}\dot{I}_3 + jX_2\dot{I}_2) \\ &= jX_{31}\dot{I}_1 + jX_{23}\dot{I}_2 + jX_3\dot{I}_3 - jX_{12}\dot{I}_1 - jX_{23}\dot{I}_3 - jX_2\dot{I}_2\end{aligned}$$

Considerando che il sistema è a tre conduttori, abbiamo:

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0$$

da cui:

$$\dot{I}_2 = -\dot{I}_1 - \dot{I}_3$$

e sostituendo otteniamo:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{12} &= jX_{12}\dot{I}_2 + jX_{31}\dot{I}_3 + jX_1\dot{I}_1 - jX_{12}\dot{I}_1 - jX_{23}\dot{I}_3 - jX_2\dot{I}_2 \\ &= jX_{12}(-\dot{I}_1 - \dot{I}_3) + jX_{31}\dot{I}_3 + jX_1\dot{I}_1 - jX_{12}\dot{I}_1 - jX_{23}\dot{I}_3 - jX_2(-\dot{I}_1 - \dot{I}_3) \\ &= jX_1\dot{I}_1 + jX_2\dot{I}_1 - 2jX_{12}\dot{I}_1 + jX_2\dot{I}_3 + jX_{31}\dot{I}_3 - jX_{12}\dot{I}_3 - jX_{23}\dot{I}_3 \\ &= j(X_1 + X_2 - 2X_{12})\dot{I}_1 + j(X_2 + X_{31} - X_{12} - X_{23})\dot{I}_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_{32} &= jX_{31}\dot{I}_1 + jX_{23}\dot{I}_2 + jX_3\dot{I}_3 - jX_{12}\dot{I}_1 - jX_{23}\dot{I}_3 - jX_2\dot{I}_2 \\ &= jX_{31}\dot{I}_1 + jX_{23}(-\dot{I}_1 - \dot{I}_3) + jX_3\dot{I}_3 - jX_{12}\dot{I}_1 - jX_{23}\dot{I}_3 - jX_2(-\dot{I}_1 - \dot{I}_3) \\ &= jX_2\dot{I}_1 + jX_{31}\dot{I}_1 - jX_{12}\dot{I}_1 - jX_{23}\dot{I}_1 + jX_2\dot{I}_3 + jX_3\dot{I}_3 - 2jX_{23}\dot{I}_3 \\ &= j(X_2 + X_{31} - X_{12} - X_{23})\dot{I}_1 + j(X_2 + X_3 - 2X_{23})\dot{I}_3\end{aligned}$$

Cioè:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{12} &= j(X_1 + X_2 - 2X_{12})\dot{I}_1 + j(X_2 + X_{31} - X_{12} - X_{23})\dot{I}_3 \\ \dot{V}_{32} &= j(X_2 + X_{31} - X_{12} - X_{23})\dot{I}_1 + j(X_2 + X_3 - 2X_{23})\dot{I}_3\end{aligned}$$

e ponendo

$$\begin{aligned}\bar{Z}_{11} &= j(X_1 + X_2 - 2X_{12}) & \bar{Z}_{12} &= j(X_2 + X_{31} - X_{12} - X_{23}) \\ \bar{Z}_{21} &= j(X_2 + X_{31} - X_{12} - X_{23}) & \bar{Z}_{22} &= j(X_2 + X_3 - 2X_{23})\end{aligned}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\dot{V}_{12} &= \bar{Z}_{11}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{12}\dot{I}_3 \\ \dot{V}_{32} &= \bar{Z}_{21}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{22}\dot{I}_3\end{aligned}$$

che in forma matriciale è

$$\begin{vmatrix} \dot{V}_{12} \\ \dot{V}_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_3 \end{vmatrix}$$

oppure

$$\begin{vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} \dot{V}_{12} \\ \dot{V}_{32} \end{vmatrix}$$

Ricordiamo come si inverte una matrice, sia data la matrice

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

la sua inversa è

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} \text{cof}(A, x_{11}) & \text{cof}(A, x_{12}) \\ \text{cof}(A, x_{21}) & \text{cof}(A, x_{22}) \end{vmatrix}^T$$

dove

$\det(A)$

indica il determinante della matrice A ;

l'esponente T

indica l'operazione di trasposizione righe/colonne;

la matrice $\begin{vmatrix} \text{cof}(A, x_{11}) & \text{cof}(A, x_{12}) \\ \text{cof}(A, x_{21}) & \text{cof}(A, x_{22}) \end{vmatrix}$

è la matrice dei cofattori (o dei complementi algebrici);

il cofattore in posizione i, j è definito come $\text{cof}(A, x_{ij}) = (-1)^{i+j} \det(\text{minore}(A, i, j))$

dove $\text{minore}(A, i, j)$ rappresenta il minore di A che si ottiene cancellando la riga i -esima e la colonna j -esima;

il segno $(-1)^{i+j}$ varia nel seguente modo $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$ cioè è $+$ se la somma degli indici è pari, negativo se è dispari

Quindi

$$\begin{vmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2} \begin{vmatrix} \bar{Z}_{22} & -\bar{Z}_{21} \\ -\bar{Z}_{12} & \bar{Z}_{11} \end{vmatrix}^T = \frac{1}{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2} \begin{vmatrix} \bar{Z}_{22} & -\bar{Z}_{12} \\ -\bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{11} \end{vmatrix}$$

sappiamo inoltre che l'operatore inverso dell'impedenza è l'operatore ammettenza, per cui

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} i_1 \\ i_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} \dot{V}_{12} \\ \dot{V}_{32} \end{vmatrix} = \frac{1}{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2} \begin{vmatrix} \bar{Z}_{22} & -\bar{Z}_{12} \\ -\bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{11} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{V}_{12} \\ \dot{V}_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\bar{Z}_{22}}{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2} & \frac{-\bar{Z}_{12}}{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2} \\ \frac{-\bar{Z}_{21}}{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2} & \frac{\bar{Z}_{11}}{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{V}_{12} \\ \dot{V}_{32} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \bar{y}_{11} & \bar{y}_{12} \\ \bar{y}_{21} & \bar{y}_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{V}_{12} \\ \dot{V}_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

questa relazione ci ricorda la relazione cui si arriva applicando il metodo dei potenziali ai nodi prendendo come riferimento il nodo 2 (le tensioni sono infatti riferite entrambi al nodo 2).

Cerchiamo quindi di ricavare ora i valori delle ammettenze, collegate a triangolo, per disegnare il circuito equivalente seguente, figura 45:

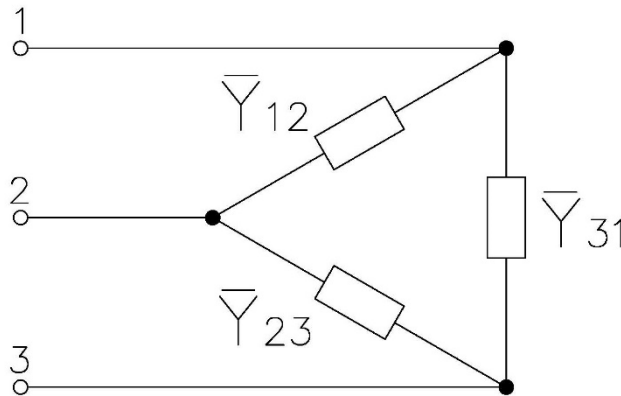


Figura 45 – Circuito equivalente a triangolo

Applichiamo il metodo dei potenziali ai nodi 1 e 3, prendendo come riferimento il nodo 2:

$$\begin{aligned} i_1 &= (\bar{Y}_{12} + \bar{Y}_{31})\dot{V}_{12} - \bar{Y}_{31}\dot{V}_{32} \\ i_3 &= -\bar{Y}_{31}\dot{V}_{12} + (\bar{Y}_{23} + \bar{Y}_{31})\dot{V}_{32} \end{aligned}$$

e, in forma matriciale,

$$\begin{vmatrix} i_1 \\ i_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{y}_{11} & \bar{y}_{12} \\ \bar{y}_{21} & \bar{y}_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{V}_{12} \\ \dot{V}_{32} \end{vmatrix}$$

dove abbiamo posto

$$\begin{aligned} \bar{y}_{11} &= \bar{Y}_{12} + \bar{Y}_{31} & \bar{y}_{12} &= -\bar{Y}_{31} \\ \bar{y}_{21} &= -\bar{Y}_{31} & \bar{y}_{22} &= \bar{Y}_{23} + \bar{Y}_{31} \end{aligned}$$

da cui segue immediatamente che

$$\begin{aligned}\bar{y}_{11} &= \bar{Y}_{12} + \bar{Y}_{31} = \frac{\bar{Z}_{22}}{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2} \\ \bar{y}_{12} &= \bar{y}_{21} = -\bar{Y}_{31} = \frac{-\bar{Z}_{12}}{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2} \\ \bar{y}_{22} &= \bar{Y}_{23} + \bar{Y}_{31} = \frac{\bar{Z}_{11}}{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2}\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\bar{Y}_{12} &= \frac{\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}}{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2} \\ \bar{Y}_{23} &= \frac{\bar{Z}_{11} - \bar{Z}_{12}}{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2} \\ \bar{Y}_{31} &= \frac{\bar{Z}_{12}}{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2}\end{aligned}$$

da queste si ricavano, ovviamente, le corrispettive impedenze collegate a triangolo

$$\begin{aligned}\bar{Z}_{12} &= \frac{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2}{\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}} \\ \bar{Z}_{23} &= \frac{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2}{\bar{Z}_{11} - \bar{Z}_{12}} \\ \bar{Z}_{31} &= \frac{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2}{\bar{Z}_{12}}\end{aligned}$$

e quindi, utilizzando le note formule stella-triangolo, otteniamo le impedenze equivalenti a stella

$$\begin{aligned}\bar{Z}_1 &= \frac{\bar{Z}_{12}\bar{Z}_{31}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}} \\ \bar{Z}_2 &= \frac{\bar{Z}_{12}\bar{Z}_{23}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}} \\ \bar{Z}_3 &= \frac{\bar{Z}_{23}\bar{Z}_{31}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}}\end{aligned}$$

ed il circuito equivalente di figura 46

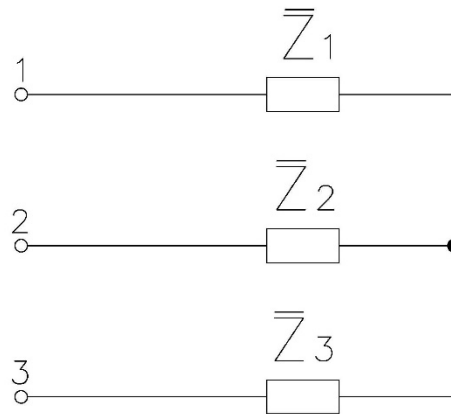


Figura 46 – Circuito equivalente a stella

Riepilogando abbiamo:

$$\bar{Z}_1 = \frac{\bar{Z}_{12}\bar{Z}_{31}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}} \quad \bar{Z}_2 = \frac{\bar{Z}_{12}\bar{Z}_{23}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}} \quad \bar{Z}_3 = \frac{\bar{Z}_{23}\bar{Z}_{31}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}}$$

$$\bar{Z}_{12} = \frac{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2}{\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}} \quad \bar{Z}_{23} = \frac{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2}{\bar{Z}_{11} - \bar{Z}_{12}} \quad \bar{Z}_{31} = \frac{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2}{\bar{Z}_{12}}$$

$$\bar{Z}_{11} = j(X_1 + X_2 - 2X_{12}) \quad \bar{Z}_{12} = j(X_2 + X_{31} - X_{12} - X_{23})$$

$$\bar{Z}_{21} = j(X_2 + X_{31} - X_{12} - X_{23}) \quad \bar{Z}_{22} = j(X_2 + X_3 - 2X_{23})$$

$$X_1 = \omega L_1 \quad X_2 = \omega L_2 \quad X_3 = \omega L_3$$

$$X_{12} = X_{21} = \omega M_{12} \quad X_{23} = X_{32} = \omega M_{23} \quad X_{31} = X_{13} = \omega M_{31}$$

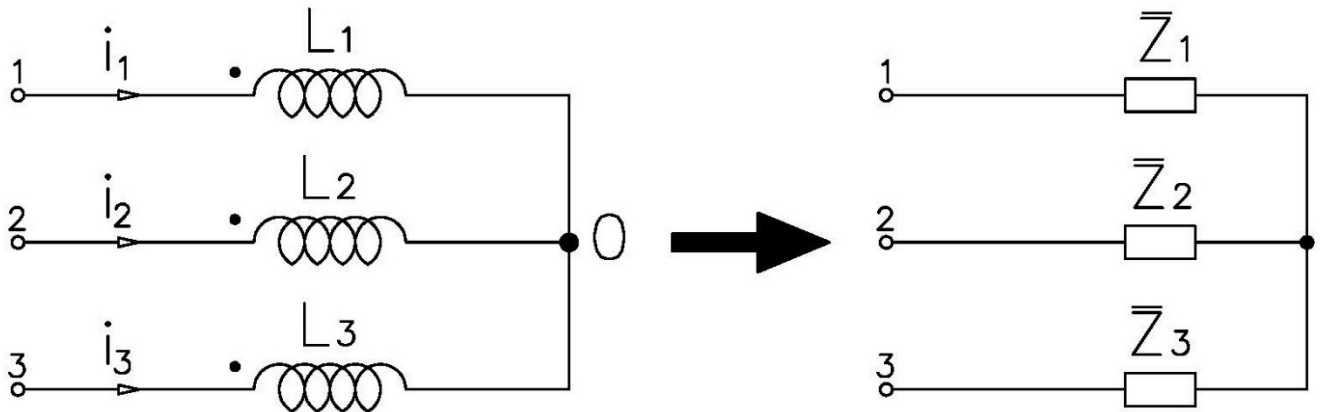


Figura 47 – Equivalenza complessiva

Caso particolare

Ipotizzando ora che sia le induttanze, sia le mutue, siano uguali tra loro, cioè:

$$L_1 = L_2 = L_3 = L \quad \text{ed} \quad M_{12} = M_{23} = M_{31} = M$$

avremo

$$X_1 = X_2 = X_3 = X_L = \omega L$$

$$X_{12} = X_{23} = X_{31} = X_M = \omega M$$

quindi

$$\bar{Z}_{11} = j(X_L + X_L - 2X_M) = 2j(X_L - X_M)$$

$$\bar{Z}_{12} = j(X_L + X_M - X_M - X_M) = j(X_L - X_M)$$

$$\bar{Z}_{21} = j(X_L + X_M - X_M - X_M) = j(X_L - X_M)$$

$$\bar{Z}_{22} = j(X_L + X_L - 2X_M) = 2j(X_L - X_M)$$

da cui

$$\bar{Z}_{11} = \bar{Z}_{22} = 2j(X_L - X_M)$$

$$\bar{Z}_{21} = \bar{Z}_{12} = j(X_L - X_M)$$

inoltre

$$\bar{Z}_{12} = \frac{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}^2}{\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}} = \frac{2j(X_L - X_M)2j(X_L - X_M) - [j(X_L - X_M)]^2}{2j(X_L - X_M) - j(X_L - X_M)} = \frac{-4(X_L - X_M)^2 + (X_L - X_M)^2}{j(X_L - X_M)} = \frac{-3(X_L - X_M)^2}{j(X_L - X_M)} = j3(X_L - X_M)$$

e, analogamente

$$\bar{Z}_{12} = \bar{Z}_{23} = \bar{Z}_{31} = \bar{Z}_{\Delta} = j3(X_L - X_M)$$

ed infine

$$\bar{Z}_1 = \frac{\bar{Z}_{\Delta}^2}{3\bar{Z}_{\Delta}} = \frac{\bar{Z}_{\Delta}}{3} = j(X_L - X_M) = j\omega(L - M)$$

Verifica

Verifichiamo, per altra via, che queste relazioni siano valide in modo da avere anche la conferma della validità delle relazioni generali.

Scriviamo quindi le espressioni istantanee delle tensioni stellate, in questo caso, anche baricentriche e l'equazione al nodo 0, centro stella o baricentro:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{10} &= j\omega L\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_3 \\ \dot{V}_{20} &= j\omega L\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_3 \\ \dot{V}_{30} &= j\omega L\dot{I}_3 + j\omega M\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 &= 0\end{aligned}$$

considerando che

$$\begin{aligned}\dot{I}_2 + \dot{I}_3 &= -\dot{I}_1 \\ \dot{I}_1 + \dot{I}_3 &= -\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 + \dot{I}_2 &= -\dot{I}_3\end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned}\dot{V}_{10} &= j\omega L\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_3 = j\omega L\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_3 + j\omega M\dot{I}_3 = j\omega(L - M)\dot{I}_1 = \bar{Z}_1\dot{I}_1 \\ \dot{V}_{20} &= j\omega L\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_3 = j\omega L\dot{I}_2 - j\omega M\dot{I}_2 - j\omega M\dot{I}_3 + j\omega M\dot{I}_3 = j\omega(L - M)\dot{I}_2 = \bar{Z}_2\dot{I}_2 \\ \dot{V}_{30} &= j\omega L\dot{I}_3 + j\omega M\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2 = j\omega L\dot{I}_3 + j\omega M\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_3 = j\omega(L - M)\dot{I}_3 = \bar{Z}_3\dot{I}_3\end{aligned}$$

C.V.D.

Quindi

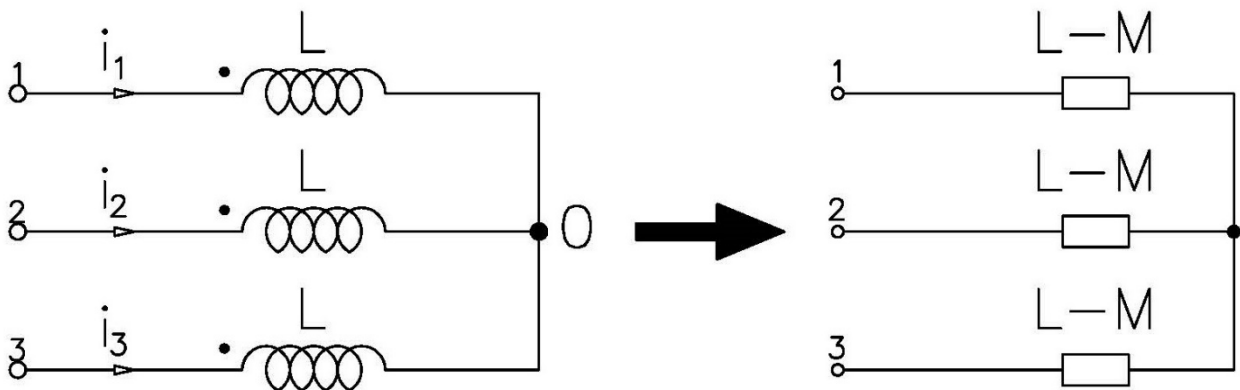


Figura 48 – Equivalenza complessiva carico equilibrato

Consideriamo adesso lo stesso circuito ma con l'aggiunta del conduttore neutro, figura 49

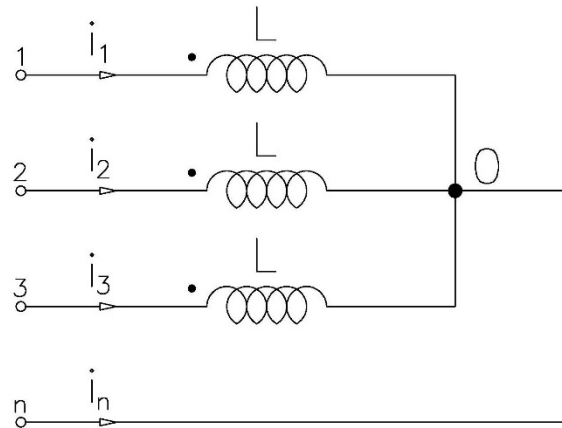


Figura 49 – Mutue con neutro

Le equazioni dell'equilibrio elettrico sono analoghe a quelle scritte prima con l'unica differenza che ora risulta

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_n = 0$$

quindi, con analoghe considerazioni abbiamo

$$\begin{aligned} \dot{V}_{10} &= j\omega L \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_3 = j\omega L \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_3 - j\omega M \dot{I}_n + j\omega M \dot{I}_3 = j\omega(L - M) \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_n \\ \dot{V}_{20} &= j\omega L \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_3 = j\omega L \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_3 - j\omega M \dot{I}_n + j\omega M \dot{I}_3 = j\omega(L - M) \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_n \\ \dot{V}_{30} &= j\omega L \dot{I}_3 + j\omega M \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = j\omega L \dot{I}_3 + j\omega M \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_3 - j\omega M \dot{I}_n = j\omega(L - M) \dot{I}_3 - j\omega M \dot{I}_n \end{aligned}$$

da cui segue immediatamente il circuito equivalente di figura 50

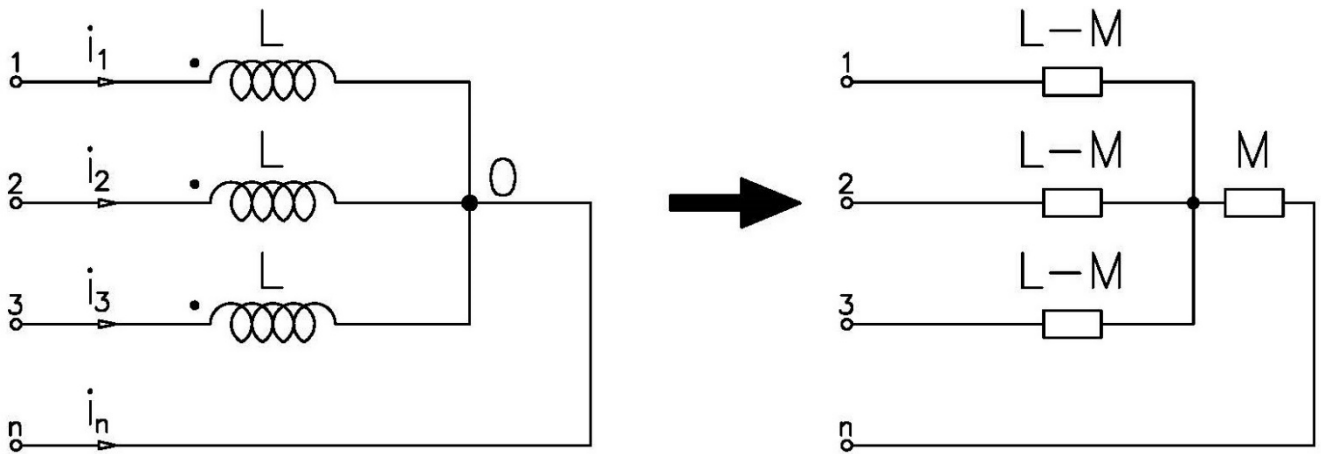


Figura 50 – Circuito equivalente con neutro

Sommario

Sistemi trifase	2
1 Generalità.....	2
1.1 Sistemi simmetrici di tensioni	3
1.2 Sistemi equilibrati di correnti	5
2 Sistemi simmetrici ed equilibrati	8
2.1 Potenza nei sistemi simmetrici ed equilibrati	12
2.2 Campo magnetico rotante di Galileo Ferraris	14
3 Sistemi dissimmetrici e squilibrati.....	17
3.1 Tensioni e correnti nei sistemi trifase a tre fili	18
3.2 I centri stella nei sistemi trifase dissimmetrici e squilibrati	20
Data una linea trifase ed il relativo sistema di tensioni concatenate V_{12}, V_{23}, V_{31} , chiameremo genericamente centro stella	20
3.3 Potenza nei sistemi dissimmetrici e squilibrati	25
3.4 Teorema di Aron	26
4 Misura delle potenze nei sistemi trifase.....	29
4.1 Misure con wattmetri monofase	29
Inserzione aciclica	29
Inserzione ciclica	29
Inserzione in quadratura	30
Inserzione Aron	30
Inserzione Righi	30
Inserzione Barbangelata	30
Misure con wattmetri trifase	30
4.2 Misura delle potenze nei sistemi simmetrici ed equilibrati	31
4.2.1 Misura del fattore di potenza	36
4.3 Misura delle potenze nei sistemi a tre fili simmetrici e squilibrati	38
4.3.1 Misura di potenza attiva, inserzione Aron	38
4.3.2 Misura di potenza reattiva, inserzione Righi	39
4.3.3 Misura di potenza reattiva, inserzione Barbangelata	41
4.3.4 Misura del fattore di potenza	42
4.4 Misura delle potenze nei sistemi a quattro fili	43
4.4.1 Misura della potenza attiva	43
4.4.2 Misura della potenza reattiva, inserzione ciclica	44
4.5 Misura delle potenze nei sistemi dissimmetrici e squilibrati	45
4.6 Gli errori nelle misure di potenza attiva trifase	47
5 Rifasamento nei sistemi trifase	49
6 Convenienza dell'utilizzo dei sistemi trifase	52
7 Accoppiamenti mutui nei sistemi trifase.....	53
Caso generale	53
Caso particolare	60
8 Studio generale dei sistemi trifase	63
8.1 Rappresentazione matriciale delle grandezze trifase	63
8.1.1 Somma di terne di vettori:	64
8.1.2 Prodotto di una terna di vettori per un numero:	65
8.1.3 Prodotto di una terna di vettori per una terna di numeri:	66
8.1.4 Prodotto di una terna di vettori per una tripla terna di numeri:	67
8.1.5 Rappresentazione matriciale della legge di Ohm, dei principi di Kirchhoff e della potenza trifase	70
8.2 L'algebra delle sequenze	71
8.3 Scomposizione di un sistema trifase di grandezze	76
8.3.1 Proprietà delle componenti simmetriche	79
8.4 Analisi dei sistemi trifase mediante le componenti simmetriche	85

8.4.1	Relazione fra le componenti simmetriche	86
8.4.2	Impedenze di sequenza	87
8.4.3	Legge di Ohm mediante le componenti di sequenza	89
8.4.4	Principi di Kirchhoff mediante le componenti di sequenza	91
8.4.5	Circuito equivalente di sequenza	92
8.4.6	Sistemi fisicamente simmetrici	93
8.4.7	Potenze trifase mediante le componenti di sequenza	94
8.5	Analisi dei guasti con le reti di sequenza	96
8.5.1	Circuito equivalente di sequenza diretta	97
8.5.2	Circuito equivalente di sequenza inversa	97
8.5.3	Circuito equivalente di sequenza omopolare	98
8.5.4	Scomposizione di una rete trifase nella sezione di guasto	98
Sommaro.....		107