UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MESSINA
Dipartimento di Ingegneria
Contrada Di Dio I, 98166 – Villaggio S. Agata Messina

Appunti Corso di Elettrotecnica

Teorema di Gauss

Anno Accademico 2020-2021

prof. ing. Bruno Azzerboni

Fonti:
Lezioni di Elettrotecnica Generale *- Giulio Battistini*
Colombo Cursi Pisa
Video online Politecnico di Milano *(Davide Contini)*
https://www.chimica-online.it/fisica/*dimostrazione-del-teorema-di-gauss.htm*

1. Teorema di Gauss per il campo elettrico

Prima di parlare del teorema di Gauss, occorre introdurre il concetto di ***flusso per un campo vettoriale***.
Supponiamo di avere, figura 1:

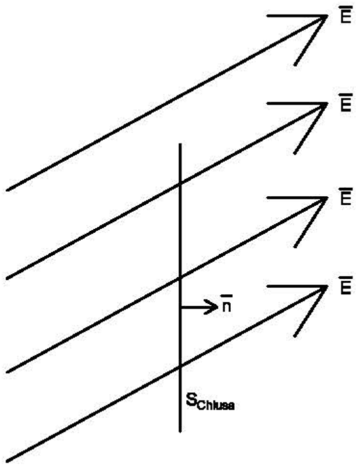

Figura 1

- un campo elettrico $\vec{E}$ rappresentato con le proprie linee di forza;
- una superficie chiusa S_{Chiusa} orientata e cioè dobbiamo scegliere quale sarà il verso positivo dell'attraversamento della superficie stessa. Scegliamo, ad esempio, come verso positivo il verso coincidente con la normale $\hat{n}$ uscente dalla superficie.

Definiamo flusso del campo elettrico $\vec{E}$ attraverso la superficie S_{Chiusa} il numero delle linee di forza del campo che attraversano la superficie e lo indichiamo con:

$$\phi_{S_{Chiusa}}(\bar{E})$$

Osserviamo che:

- più il campo è intenso, più le linee di forza sono dense e quindi sarà maggiore il numero delle linee di forza che attraversano la superficie S_{Chiusa}, e quindi maggiore sarà il flusso;
- più grande è la superficie più linee di forza saranno intercettate e maggiore sarà il flusso;
- l'orientamento della superficie nello spazio è importante, infatti se la superficie fosse parallela alle linee di forza del campo allora nessuna linea di forza attraverserebbe la superficie e, di conseguenza, il flusso sarebbe nullo.

Di conseguenza il flusso di un campo vettoriale dipende da tre condizioni:

- l'intensità del campo,
- la grandezza della superficie;
- l'orientamento relativo tra la superficie ed il campo.

Affrontiamo ora il ***teorema di Gauss***. Considerimao una superficie chiusa di forma qualsiasi orientata nello spazio e, per definizione, la superficie chiusa ha un orientamento positivo sempre rivolto verso l'esterno e quindi dobbiamo considerare positive le normali alla superficie dirette verso l'esterno, figura 2.

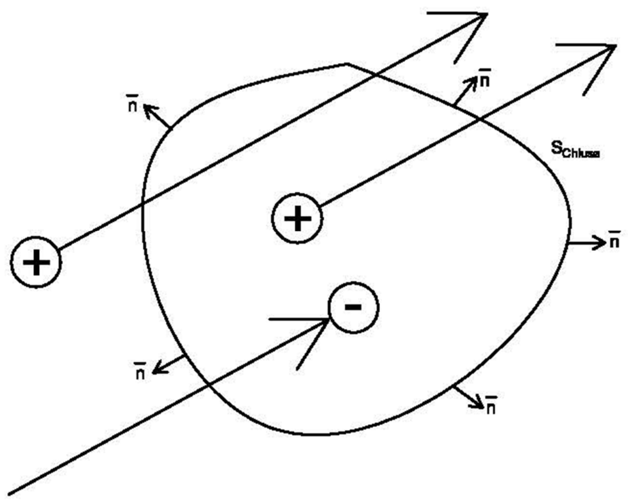

Figura 2

Il teorema di Gauss afferma che il flusso di un qualsiasi campo elettrico attraverso una superficie chiusa qualsiasi è dato dalla somma algebrica delle cariche interne alla superficie stessa diviso la costante dielettrica del vuoto:

$$\phi_{S_{Chiusa}}(\vec{E}) = \frac{\sum Q_{interne}}{\varepsilon_0}$$

Le $Q_{interne}$ saranno prese ciascuna con il proprio segno, cioè se una carica è positiva ed è interna alla superficie, le sue linee di forza necessariamente usciranno dalla superficie (fig. 2) e, di conseguenza, l'attraverseranno concordi con il segno positivo e quindi avremo un flusso positivo. Se la carica fosse negativa le sue linee di forza attraverseranno la superficie con segno opposto rispetto alla normale e quindi daranno un contributo negativo al flusso.

Ci interessano solo le $Q_{interne}$ perché se avessimo una qualsiasi carica esterna (fig.2) le linee di forza che attraversano la superficie dovranno attraversarla due volte, la prima volta dovranno entrare e quindi contributo negativo e la seconda uscire e quindi contributo positivo; avremo così un contributo totale al flusso della carica esterna uguale a zero.

1.2 Dimostrazione del teorema di Gauss

Consideriamo una carica puntiforme Q per esempio positiva ed una superficie sferica di raggio r con il centro coincidente con la carica.
Immaginiamo ora di suddividere la superficie della sfera in tante piccolissime superfici (fig. 3) ognuna di area $\Delta\overline{S_i}$ tale che la somma di tutte queste piccole porzioni di superfici della sfera dia proprio la superficie totale della sfera che è pari a $4\pi r^2$ con r raggio della sfera e distanza di ogni punto della superficie della sfera dalla carica Q.

Il vettore superficie $\Delta\overline{S_i}$ ha modulo pari all'area della superficie e direzione radiale. Il verso è uscente in quanto tale deve essere per definizione nel caso di una superficie chiusa.
Quindi:

$$\Delta\overline{S_1} + \Delta\overline{S_2} + \Delta\overline{S_3} + \cdots + \Delta\overline{S_n} = 4\pi r^2$$

Il campo elettrico generato dalla carica positiva Q avrà le linee di forza radiali uscenti dalla carica dirette verso ogni punto della superficie della sfera. Essendo ogni elemento in cui è stata divisa la superficie della sfera molto piccolo, il vettore campo elettrico risulterà parallelo alla normale di ogni piccolo elemento di area $\Delta\bar{S}$. Di conseguenza il flusso del campo elettrico, calcolato attraverso ogni elementino di area, sarà pari al prodotto tra il modulo del campo elettrico e l'area stessa (essendo zero l'angolo tra la normale alla superficie ed il vettore campo).

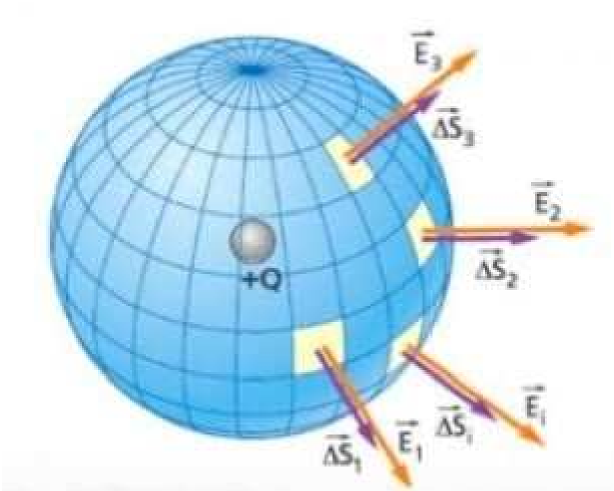

Figura 3

Quindi il flusso totale del campo elettrico sarà pari alla somma di tutti i flussi di campo elettrico calcolati attraverso le superfici di area $\Delta\bar{S}$:

$$\phi_{Sfera}(\bar{E}) = \phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_n = \bar{E}_1\Delta\overline{S_1} + \bar{E}_2\Delta\overline{S_2} + \cdots + \bar{E}_n\Delta\overline{S_n}$$

Ma i campi calcolati $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \ldots \bar{E}_n$ sono tutti uguali in quanto il modulo del campo elettrico generato da una carica puntiforme dipende dal modulo della carica Q che è costante e dalla distanza a cui ci si pone da essa. Tutti i punti della sfera sono posti alla stessa distanza dalla carica, avremo, in base alla legge di Coulomb, che:

$$\bar{E}_1, \bar{E}_2, \ldots \bar{E}_n = \bar{E} = k_0 \frac{Q}{r^2}$$

Quindi il flusso risulterà pari a:

$$\phi_{Sfera}(\bar{E}) = \phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_n = \bar{E}_1\Delta\overline{S_1} + \bar{E}_2\Delta\overline{S_2} + \cdots + \bar{E}_n\Delta\overline{S_n} = \bar{E}(\Delta\overline{S_1} + \Delta\overline{S_2} + \cdots + \Delta\overline{S_n})$$

Sostituendo $\bar{E}$ con la propria espressione, avremo:

$$\phi_{Sfera}(\bar{E}) = k_0\frac{Q}{r^2}(\Delta\overline{S_1} + \Delta\overline{S_2} + \cdots + \Delta\overline{S_n})$$

Ricordando che $\Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \cdots + \Delta S_n = 4\pi r^2$, otterremo:

$$\phi_{Sfera}(\bar{E}) = k_0\frac{Q}{r^2}4\pi r^2$$

Ed essendo

$$k_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Si avrà:

$$\phi_{Sfera}(\bar{E}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

c.v.d.

2. Teorema di Gauss per il campo magnetico

Le linee di forza del campo magnetico $\vec{B}$ non hanno inizio e fine come quelle del campo elettrico ma sono sempre delle linee chiuse. Se ci riferiamo al campo magnetico generato da un dipolo magnetico, per esempio un magnete permanente con le proprie polarità Nord e Sud. (fig.3) e tracciamo le linee di forza ci accorgiamo che ciascuna linea attraversa la superficie due volte, una volta nel verso entrante ed una volta nel verso uscente, quindi il flusso totale è nullo; per cui:

$$\phi_{S_{Chiusa}}(\vec{B}) = 0$$

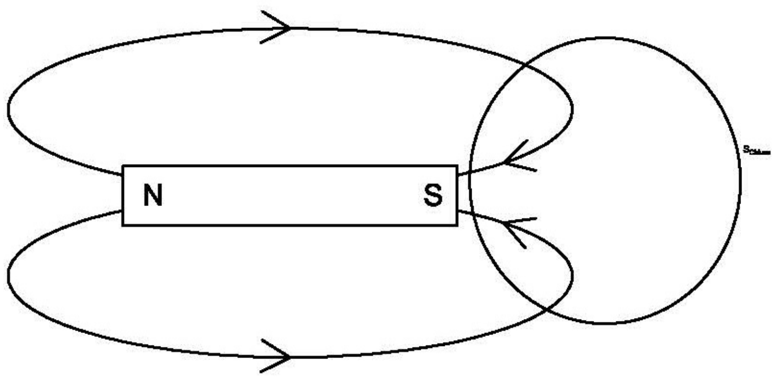

Figura 4

Sommario