UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MESSINA
Dipartimento di Ingegneria
Contrada Di Dio I, 98166 – Villaggio S. Agata Messina

Appunti Corso di Elettrotecnica

Dimostrazione teorema di reciprocità

Anno Accademico 2016-2017

prof. ing. Bruno Azzerboni

Dimostrazione teorema di reciprocità per gli accoppiamenti induttivi
Ricordiamo che dato un accoppiamento mutuo del tipo mostrato in fig.1,

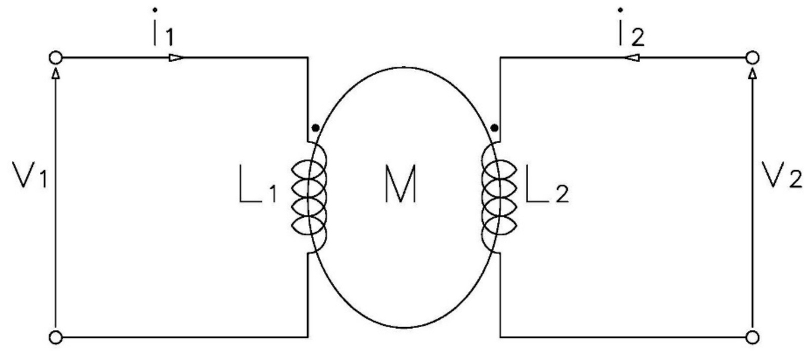

Fig. 1

si definiscono coefficienti di autoinduzione

$$L_1 = \frac{\phi_{1c}}{i_1}\bigg|\, i_2 = 0; \quad L_2 = \frac{\phi_{2c}}{i_2}\bigg|\, i_1 = 0;$$

ed i coefficienti di mutua induzione

$$M_{12} = \frac{\phi_{2c}}{i_1}\bigg|\, i_2 = 0; \quad M_{21} = \frac{\phi_{1c}}{i_2}\bigg|\, i_1 = 0$$

il *teorema di reciprocità* afferma che $M_{12} = M_{21}$, dimostriamolo:

il sistema dell'equilibrio elettrico per il circuito di fig. 1 è dato da:

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M_{21} \dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M_{12} \dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

la potenza istantanea che complessivamente interessa il sistema è

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2$$

Quindi il lavoro elementare dL (energia elementare) è:

$$\begin{aligned} dL = pdt = v_1 i_1 dt + v_1 i_1 dt = \left(L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{21} \frac{di_2}{dt}\right) i_1 dt + \left(L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{12} \frac{di_1}{dt}\right) i_2 dt = \\ = L_1 i_1 di_1 + M_{21} i_1 di_2 + L_2 i_2 di_2 + M_{12} i_2 di_1 \end{aligned}$$

Il lavoro esteso al percorso chiuso riportato in fig. 2, ottenibile facendo variare in modo opportuno le correnti è dato da:

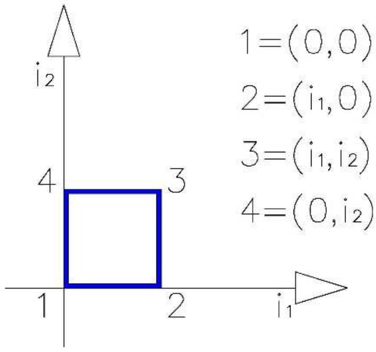

Fig. 2

Tratto 1-2

$$i_2 = costante = 0 \ \rightarrow di_2 = 0, \ \ di_1 > 0$$

$$L_{12} = \int_1^2 dL = \int_1^2 L_1 i_1 di_1 + M_{21} i_1 di_2 + L_2 i_2 di_2 + M_{12} i_2 di_1 = \int_1^2 L_1 i_1 di_1 = \frac{1}{2} L_1 i_1^2$$

Tratto 2-3

$$i_1 = costante \ \rightarrow di_1 = 0, \ \ di_2 > 0$$

$$L_{23} = \int_2^3 dL = \int_2^3 L_1 i_1 di_1 + M_{21} i_1 di_2 + L_2 i_2 di_2 + M_{12} i_2 di_1 = \int_2^3 M_{21} i_1 di_2 + L_2 i_2 di_2 = M_{21} i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$$

Tratto 3-4

$$i_2 = costante \ \rightarrow di_2 = 0 \ \ di_1 < 0$$

$$L_{34} = \int_3^4 dL = \int_3^4 L_1 i_1 di_1 + M_{21} i_1 di_2 + L_2 i_2 di_2 + M_{12} i_2 di_1 = \int_3^4 -L_1 i_1 di_1 - M_{12} i_2 di_1 = -M_{12} i_2 i_1 - \frac{1}{2} L_1 i_1^2$$

Tratto 4-1

$$i_1 = costante = 0 \ \rightarrow di_1 = 0 \ \ di_2 < 0$$

$$L_{41} = \int_4^1 dL = \int_4^1 L_1 i_1 di_1 + M_{21} i_1 di_2 + L_2 i_2 di_2 + M_{12} i_2 di_1 = \int_3^4 -L_2 i_2 di_2 = -\frac{1}{2} L_2 i_2^2$$

sommando si ottiene il lavoro complessivo:

$$L_c = L_{12} + L_{23} + L_{34} + L_{41} = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + M_{21} i_1 i_2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 - M_{12} i_2 i_1 - \frac{1}{2}L_1 i_1^2 - \frac{1}{2}L_2 i_2^2$$
$$= M_{21} i_1 i_2 - M_{12} i_2 i_1 = (M_{21} - M_{12}) i_1 i_2$$

Ed essendo L_c il lavoro esteso ad un percorso chiuso deve essere nullo, per cui:

$$M_{21} = M_{12}$$

come volevasi dimostrare.

N.B.: se fosse $M_{21} > M_{12} \rightarrow L_c > 0$ significherebbe che viene fatto del lavoro sul sistema;
se fosse $M_{21} < M_{12} \rightarrow L_c < 0$ significherebbe che viene fatto del lavoro dal sistema

E' possibile pervenire allo stesso risultato in altro modo:
consideriamo la funzione energia del sistema $w = w(i_1, i_2)$, per definizione di energia si ha $dw = dL$, essendo w una funzione scalare, la forma differenziale dL deve necessariamente essere esatta, cioè essendo

$$dL = pdt = v_1 i_1 dt + v_1 i_1 dt = \left(L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{21} \frac{di_2}{dt}\right) i_1 dt + \left(L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{12} \frac{di_1}{dt}\right) i_2 dt =$$
$$= L_1 i_1 di_1 + M_{21} i_1 di_2 + L_2 i_2 di_2 + M_{12} i_2 di_1 = (L_1 i_1 + M_{12} i_2) di_1 + (M_{21} i_1 + L_2 i_2) di_2$$

condizione necessaria e sufficiente affinché tale forma differenziale sia esatta è che sia chiusa, cioè che

$$\frac{\partial}{\partial i_2}(L_1 i_1 + M_{12} i_2) = \frac{\partial}{\partial i_1}(M_{21} i_1 + L_2 i_2)$$
$$0 + \frac{\partial}{\partial i_2} M_{12} i_2 = \frac{\partial}{\partial i_1} M_{21} i_1 + 0$$
$$M_{12} \frac{\partial}{\partial i_2} i_2 = M_{21} \frac{\partial}{\partial i_1} i_1$$

per cui

$$M_{12} = M_{21}$$

come volevasi dimostrare.

Sommario