UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MESSINA
Dipartimento di Ingegneria
Contrada Di Dio I, 98166 – Villaggio S. Agata Messina

Appunti Corso di Elettrotecnica

Metodi risolutivi per l'analisi delle reti

Anno Accademico 2016-2017

prof. ing. Bruno Azzerboni

Fonti:
Circuiti Elettrici *- Charles K. Alexander, Matthew N. O. Sadiku*
McGraw-Hill
Fondamenti di teoria dei circuiti *- Charles A. Desoer, Ernest S. Kuh*
Franco Angeli
Lezioni di Elettrotecnica Generale *- Giulio Battistini*
Colombo Cursi Pisa

Principi di Kirchhoff
Una rete o circuito elettrico è generalmente costituto da nodi, rami e maglie. Definiamo:

- *Nodo*: punto in cui convergono *almeno* due conduttori (fig. 1a);
- *Ramo*: conduttore che collega *direttamente* due nodi tra loro;
- *Maglia*: percorso chiuso costituito da rami della rete che ci consente di partire da un nodo e tornarci, *percorrendo una sola volta* i rami che costituiscono la maglia stessa (fig. 1b)

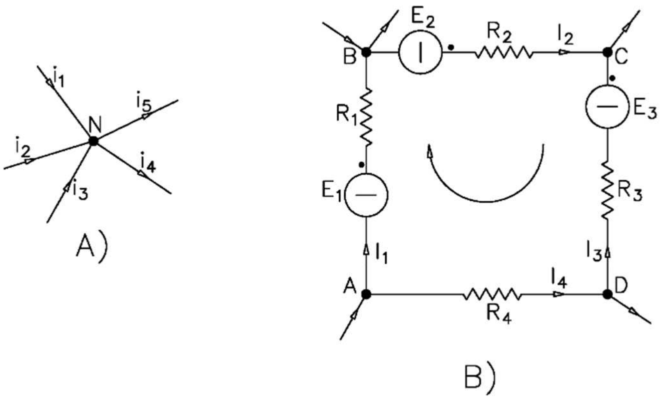


Fig. 1

Data una rete comunque complessa a parametri concentrati, il problema che è necessario risolvere può essere così formulato: *note le resistenze dei conduttori che compongono la rete e le f.e.m. interne ed esterne presenti in ciascuno dei rami, determinare le correnti nei singoli rami*.

Chiariamo il concetto di f.e.m. esterna e interna:

- *f.e.m. esterna*: è una f.e.m. inserita dall'esterno, per esempio generatori dipendenti o indipendenti;
- *f.e.m. interna*: è una f.e.m. che nasce a causa di qualche fenomeno interno, per esempio f.e.m. indotte o tensioni su capacità.

Legge ai nodi o prima legge di Kirchhoff
Se i conduttori che convergono in un nodo sono percorsi da corrente e *se nel nodo non c'è capacità di generare o accumulare cariche, allora la somma algebrica delle correnti entranti e/o uscenti dal nodo è nulla* (*Legge ai nodi o prima legge di Kirchhoff).*

Se quindi stabiliamo la convenzione di attribuire il segno positivo alle correnti entranti al nodo, allora avremo:

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0$$

Se invece scegliessimo di attribuire il segno positivo alle correnti uscenti dal nodo, avremmo:

$$-I_1 - I_2 - I_3 + I_4 + I_5 = 0$$

In generale, quindi:

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0$$

Legge alle maglie o seconda legge di Kirchhoff
Consideriamo una maglia ABCD (fig. 1b) di una rete e, stabilito un verso di percorrenza, applichiamo la legge di Ohm generalizzata ai vari rami costituenti la maglia:

Ramo AB)	$V_{AB} + E_1 = R_1 I_1$
Ramo BC)	$V_{BC} + E_2 = R_2 I_2$
Ramo CD)	$V_{CD} - E_3 = -R_3 I_3$
Ramo DA)	$V_{DA} = -R_4 I_4$

Sommando membro a membro e tenendo presente che, evidentemente,

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DA} = 0$$

cioè

$$E_1 + E_2 - E_3 = R_1 I_1 + R_2 I_2 - R_3 I_3 - R_4 I_4$$

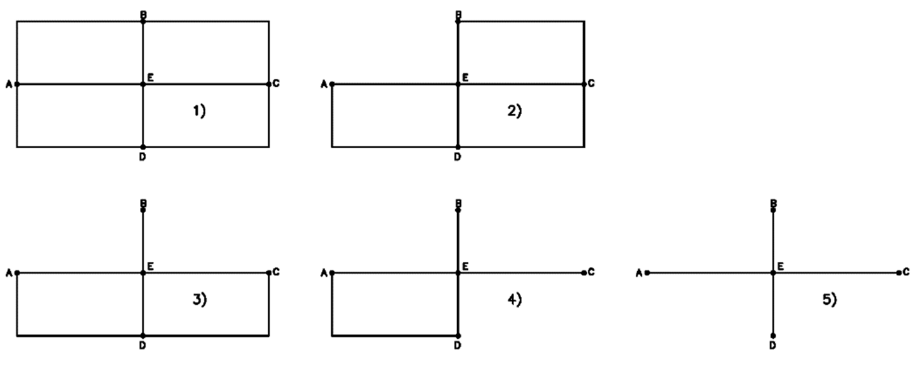
dove E_1 ed E_2 sono positive perché agiscono concordemente al nostro senso di percorrenza della maglia, mentre E_3 è negativa perché agisce in senso contrario al nostro senso di percorrenza della maglia.

In generale:

$$\sum_{k=1}^{n} E_k = \sum_{k=1}^{n} R_k I_k$$

Vale a dire: *scelta una maglia e fissato un senso di percorrenza, la somma algebrica delle f.e.m. interne e esterne alla maglia è uguale alla somma algebrica delle cadute di tensione sui bipoli costituenti la maglia stessa* (*Legge alle maglie o seconda legge di Kirchhoff)*

Soluzione dei circuiti utilizzando le leggi di Kirchhoff, la regola del taglio
In generale risolvere un circuito significa trovare tutte le correnti che scorrono nei rami del circuito stesso. Pertanto se nel circuito sono presenti r rami, le correnti incognite saranno r e per trovarle è necessario impostare un sistema di r equazioni in r incognite ed accertarsi che le r equazioni siano linearmente indipendenti.
Per scrivere il sistema possiamo utilizzare le due leggi di Kirchhoff, ai nodi ed alle maglie.
Quando si scrivono le equazioni ai nodi l'unico problema è che se in un circuito sono presenti n nodi non è possibile scrivere n equazioni ai nodi, in quanto una di esse sarà sicuramente una combinazione lineare delle altre, pertanto con la prima legge di kirchhoff si possono scrivere soltanto $(n-1)$ equazioni ai nodi escludendo a scelta uno qualsiasi dei nodi presenti.
Dovendo scrivere r equazioni ed avendone scritte $(n-1)$, ne rimangono da scrivere $[r-(n-1)]$.
Le rimanenti $[r-(n-1)]$ equazioni necessarie si possono ottenere utilizzando la legge alle maglie usando però molta cautela, nel senso che questa volta non è possibile scegliere $[r-(n-1)]$ maglie a caso, né tanto meno è sempre possibile intuire con facilità quali siano le maglie linearmente indipendenti.
A tal proposito esiste una regola chiamata *regola del taglio*, che ora applicheremo al circuito costituito da 5 nodi e 8 rami riportato al punto 1) nella figura seguente:



Regola del taglio

La regola del taglio si applica percorrendo i seguenti passi:

- scegliamo nel circuito del punto 1) una maglia a caso, scegliamo per esempio la maglia ABEA, fissiamo un senso di percorrenza della maglia e scriviamo l'equazione, una volta scritta l'equazione tagliamo uno qualsiasi dei rami appartenenti alla maglia scelta, per esempio potremmo decidere di tagliare il ramo AB, fatto ciò rimane il circuito disegnato al punto 2).
- in questo circuito, punto 2), scegliamo a caso un'altra maglia, per esempio la maglia BCEB anche per questa nuova maglia fissiamo un senso di percorrenza e scriviamo l'equazione. Tagliando ora un ramo a caso appartenente a questa seconda maglia, per esempio il ramo BC, avremo ora il circuito riportato al punto 3),
- ripetendo ancora una volta il procedimento per il circuito del punto 3), scegliendo, sempre liberamente la maglia ECDE e tagliando un qualsiasi ramo della stessa maglia si ottiene il circuito del punto 4)
- a questo punto siamo rimasti con una sola maglia AEDE, procediamo come già fatto, tagliamo l'unico ramo AD e ci riduciamo al circuito di cui al punto 5) nel quale non sono più presenti maglie. Non possiamo quindi scrivere nessuna altra equazione alla maglia.

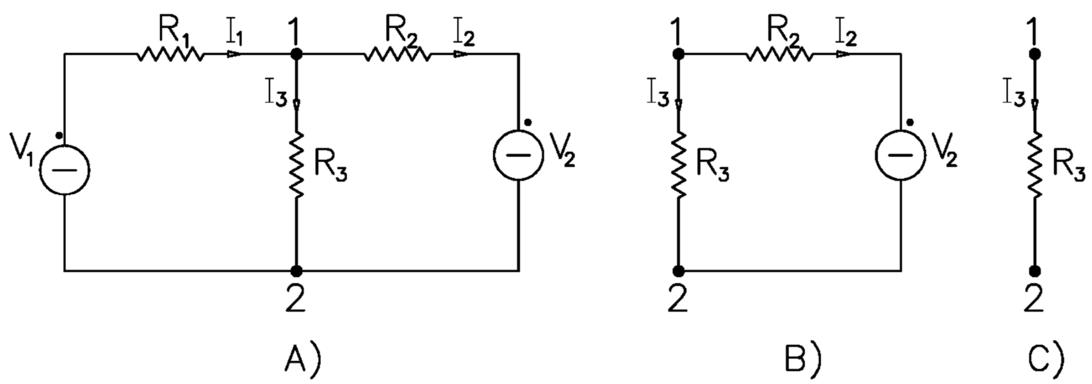
Abbiamo quindi scritto 4 equazioni linearmente indipendenti e non possiamo scriverne altre perché siamo rimasti senza maglie.

In definitiva per il nostro caso avevamo:

- $r = 8$ rami e cioè 8 incognite,
- $n = 5$ nodi,
- $(n - 1) = 4$ equazioni da scrivere ai nodi,
- $[r - (n - 1)] = [8 - (5 - 1)] = 4$ equazioni rimanenti alle maglie

E, come abbiamo visto, con la regola del taglio abbiamo potuto scrivere solo 4 equazioni alle maglie che sono effettivamente il numero esatto di quante ce ne servissero.

Per meglio chiarire la metodologia, facciamo un esempio. Sia dato il circuito della figura seguente punto A)



Il sistema ha 3 rami e quindi dobbiamo determinare le 3 correnti incognite. Procediamo nella seguente maniera:

- Scegliamo il nodo 1 e scriviamo l'equazione:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

- Scegliamo la maglia (V_1, R_1, R_3, V_1) che così descritta ci indica anche il senso di percorrenza e scriviamo l'equazione:

$$V_1 = R_1 I_1 + R_3 I_3$$

- Tagliamo il ramo (V_1, R_1) ottenendo il circuito al punto B) e scegliamo l'unica maglia (V_2, R_2, R_3, V_2), scriviamo l'equazione:

$$V_2 = -R_2 I_2 + R_3 I_3$$

- Tagliamo il ramo (R_3) ottenendo il circuito al punto C) e, non essendoci più nessuna maglia, abbiamo finito.

Il sistema è quindi:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ V_1 = R_1 I_1 + R_3 I_3 \\ V_2 = -R_2 I_2 + R_3 I_3 \end{cases}$$

Risolvendolo avremo calcolato le tre correnti incognite e risolto il problema.

Metodi sistematici per l'analisi delle reti

Analisi nodale (metodo dei potenziali dei nodi)

Analisi nodale in assenza di generatori di tensione
L'analisi nodale, detta altresì metodo dei potenziali ai nodi, è un procedimento sistematico per analizzare i circuiti che, utilizzando le tensioni di nodo come incognite al posto delle tensioni dei singoli elementi circuitali, permette di ridurre il numero di equazioni simultanee da risolvere.

L'obiettivo dell'analisi nodale è, allora, la determinazione delle tensioni di nodo.

In pratica, dato un circuito con n nodi, l'analisi nodale consiste di 6 passi:

- *Passo 1*: scegliere un nodo come nodo di riferimento.
- *Passo 2*: assegnare le tensioni agli altri nodi, ***notando che le stesse sono misurate rispetto al nodo di riferimento e sono incognite***, (le tensioni di nodo hanno la polarità positiva sui nodi e negativa sull'**unico** nodo di riferimento);
- *Passo 3*: assegnare una orientazione per i rami del circuito in esame in modo che si possa definire se le correnti siano entranti o uscenti dai rispettivi nodi
- *Passo 4*: applicare, ai nodi diversi da quello di riferimento, la legge di Kirchhoff delle correnti;
- *Passo 5*: utilizzare la legge di Ohm per esprimere le correnti di ramo in funzione delle tensioni di nodo;
- *Passo 6*: risolvere il sistema ottenuto calcolando, così, le tensioni di nodo incognite e, di conseguenza, le correnti di ramo utilizzando la legge di Ohm già scritta nel passo 2.

Sia data la rete di fig. 2 costituita da tre resistori, R_1, R_2, R_3 e da due generatori indipendenti ideali di corrente I_1 ed I_2.

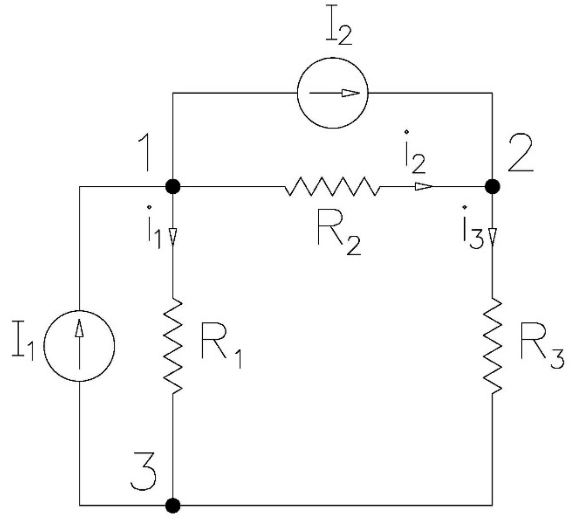


Fig. 2

La rete ha tre rami e, quindi, le nostre incognite saranno tre e, precisamente, i_1, i_2 ed i_3 che potremmo determinare utilizzando le equazioni di Kirchhoff.

Applichiamo ora, invece, questo metodo alla rete di figura 1.

- *Passo 1*: fissiamo come riferimento il nodo 3;
- *Passo 2*: assegniamo le tensioni di nodo v_1 e v_2 agli altri nodi, figura 3;
- *Passo 3*: assegniamo una orientazione per le correnti nei rami del circuito

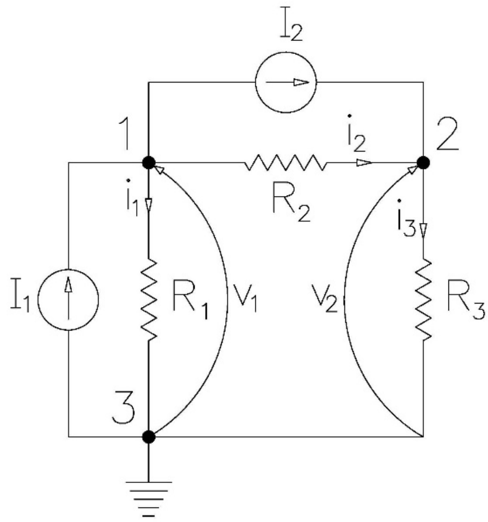


Fig. 3

- *Passo 4*: applichiamo, ai nodi 1 e 2, la legge di Kirchhoff delle correnti;

Nodo 1) $I_1 - I_2 = i_1 + i_2$
Nodo 2) $I_2 = -i_2 + i_3$

- *Passo 5*: utilizziamo la legge di Ohm per esprimere le correnti di ramo in funzione delle tensioni di nodo;

$$i_1 = \frac{v_1}{R_1} = G_1 v_1$$
$$i_2 = \frac{v_1 - v_2}{R_2} = G_2(v_1 - v_2)$$
$$i_3 = \frac{v_2}{R_3} = G_3 v_2$$

dalle equazioni ai nodi, sostituendo le espressioni delle correnti, otteniamo:

$$I_1 - I_2 = G_1 v_1 + G_2(v_1 - v_2) = v_1(G_1 + G_2) - v_2 G_2$$
$$I_2 = -G_2(v_1 - v_2) + G_3 v_2 = -v_1 G_2 + v_2(G_2 + G_3)$$

da cui il sistema:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 = v_1(G_1 + G_2) - v_2 G_2 \\ I_2 = -v_1 G_2 + v_2(G_2 + G_3) \end{cases}$$

e, in forma matriciale:

$$\begin{vmatrix} (G_1 + G_2) & -G_2 \\ -G_2 & (G_2 + G_3) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_1 - I_2 \\ I_2 \end{vmatrix}$$

- *Passo 6*: risolvendo il sistema ottenuto, si ricavano le tensioni di nodo incognite e, di conseguenza, le correnti di ramo utilizzando la legge di Ohm già scritta nel passo 5.

Analisi nodale in presenza di generatori di tensione
Applichiamo ora il metodo dell'analisi nodale a sistemi nei quali siano inseriti generatori di tensione, quale per esempio, la rete di fig. 4,

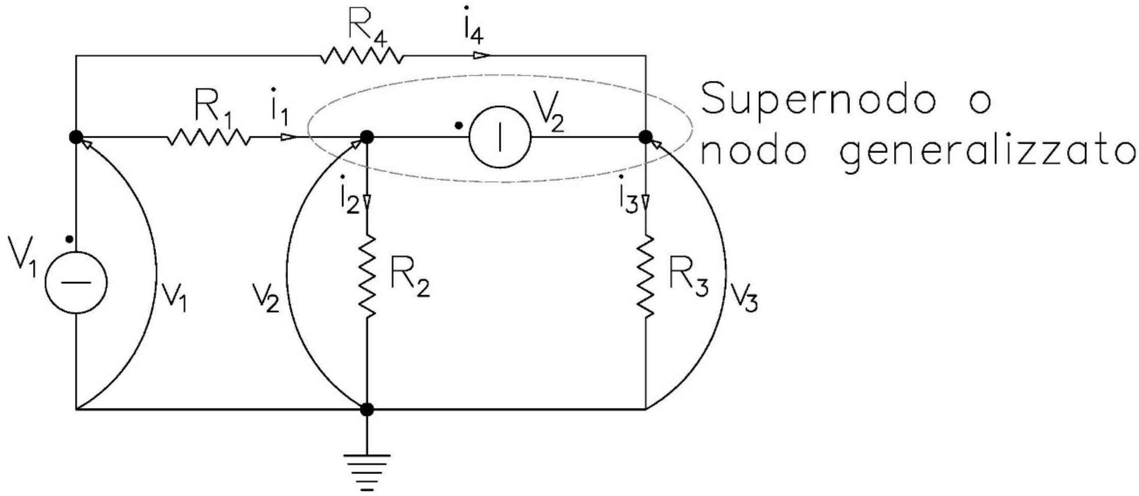


Fig. 4

Si possono verificare due casi:

- ***Caso 1***: il generatore di tensione è collegato tra il nodo di riferimento ed un altro nodo, nel nostro caso ci stiamo riferendo al generatore V_1; scrivendo l'equazione di Ohm generalizzata al nodo 1 abbiamo:

$$v_1 - V_1 = 0$$

  da cui

$$v_1 = V_1$$

  e quindi abbiamo semplicemente che la tensione del nodo non di riferimento è uguale alla tensione imposta dal generatore. L'analisi nodale è, di conseguenza, semplificata perché conosciamo a priori la tensione di un nodo.

- ***Caso 2***: il generatore di tensione (indipendente o controllato) è collegato tra due nodi non di riferimento, allora i due nodi costituiscono un *supernodo* e per determinare le tensioni di nodo, dobbiamo applicare la legge di Kirchhoff alle maglie (KVL) e la legge di Kirchhoff ai nodi (KCL).

In generale un supernodo è costituito da un generatore di tensione (indipendente o controllato) collegato tra due nodi non di riferimento e dagli altri eventuali rami ad esso collegati in parallelo.

KCL al supernodo $$i_1 + i_4 = i_2 + i_3$$

$$i_1 = \frac{v_1 - v_2}{R_1}$$
$$i_4 = \frac{v_1 - v_3}{R_4}$$
$$i_2 = \frac{v_2}{R_2}$$
$$i_3 = \frac{v_3}{R_3}$$

da cui si ha:

$$\frac{v_1 - v_2}{R_1} + \frac{v_1 - v_3}{R_4} = \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_3}{R_3}$$

e ricordando che $v_1 = V_1$ abbiamo:

$$\frac{V_1 - v_2}{R_1} + \frac{V_1 - v_3}{R_4} = \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_3}{R_3}$$

KVL al supernodo, con riferimento alla figura 5

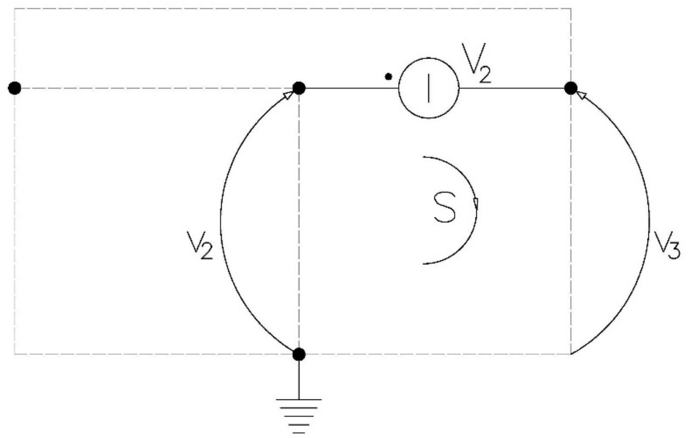


Fig. 5

$$-V_2 - v_3 + v_2 = 0$$
$$V_2 = v_2 - v_3$$

in definitiva, combinando le equazioni, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{V_1 - v_2}{R_1} + \dfrac{V_1 - v_3}{R_4} = \dfrac{v_2}{R_2} + \dfrac{v_3}{R_3} \\ V_2 = v_2 - v_3 \end{cases}$$

da cui ricaviamo le tensioni di nodo v_2 e v_3.

E’ bene ricordare le seguenti *proprietà di un supernodo*:

- il generatore di tensione interno al supernodo fornisce una equazione di vincolo necessaria al calcolo delle tensioni di nodo;
- un supernodo non ha una tensione propria;
- ad un supernodo occorre applicare sia la KCL, sia la KVL.

Esempio
Sia data la rete riportata in figura 6, si applichi alla stessa l’analisi nodale:

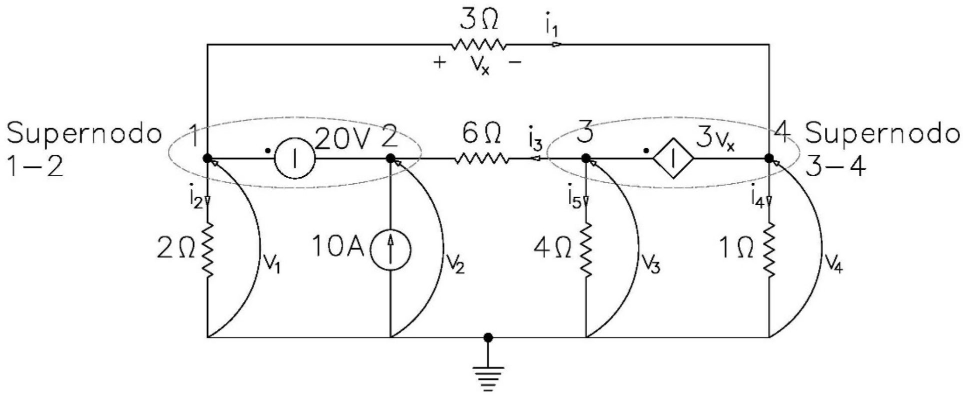


Fig. 6

KCL al supernodo 1-2

$$10 + i_3 = i_2 + i_1$$

$$10 + \frac{v_3 - v_2}{6} = \frac{v_1}{2} + \frac{v_1 - v_4}{3}$$

$$60 + v_3 - v_2 - 3v_1 - 2v_1 + 2v_4 = 0$$

$$60 - 5v_1 - v_2 + v_3 + 2v_4 = 0$$

$$5v_1 + v_2 - v_3 - 2v_4 = 60 \qquad \text{(A)}$$

KCL al supernodo 3-4

$$i_1 = i_3 + i_4 + i_5$$

$$\frac{v_1 - v_4}{3} = \frac{v_3 - v_2}{6} + \frac{v_4}{1} + \frac{v_3}{4}$$

$$4v_1 - 4v_4 - 2v_3 + 2v_2 - 12v_4 - 3v_3 = 0$$

$$4v_1 + 2v_2 - 5v_3 - 16v_4 = 0 \qquad \text{(B)}$$

Applichiamo ora la KVL alle maglie costituite dai generatori e dai rami “affacciati” agli stessi, figura 7

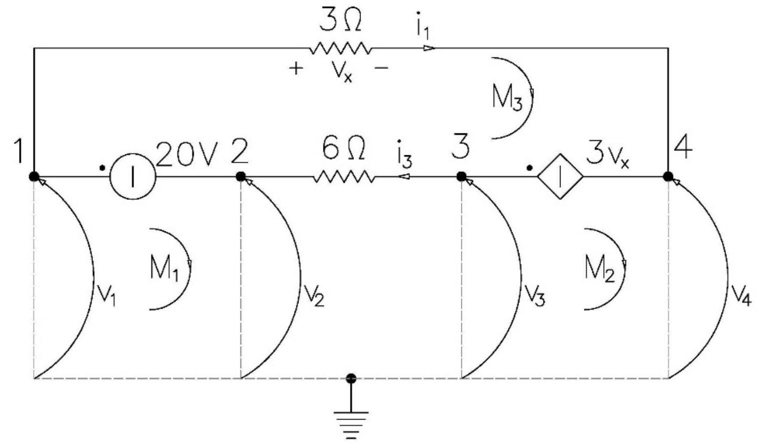


Fig. 7

Maglia M1

$$-20 - v_2 + v_1 = 0$$

$$v_1 - v_2 = 20 \qquad \text{(C)}$$

Maglia M2

$$-3v_x - v_4 + v_3 = 0$$

essendo $v_x = v_1 - v_4$ si ha:

$$-3v_1 + 3v_4 - v_4 + v_3 = 0$$

$$-3v_1 + v_3 + 2v_4 = 0 \qquad \text{(D)}$$

Maglia M3

$$-v_x + 3v_x + 20 = 6i_3$$

essendo $i_3 = \frac{v_3 - v_2}{6}$, da cui $6i_3 = v_3 - v_2$ e $v_x = v_1 - v_4$ si ottiene:

$$-v_1 + v_4 + 3v_1 - 3v_4 + 20 = v_3 - v_2$$

$$-2v_1 - v_2 + v_3 + 2v_4 = 20 \qquad \text{(E)}$$

Noi dobbiamo calcolare le quattro tensioni di nodo v_1, v_2, v_3 e v_4, servono quindi solo quattro equazioni delle cinque, dalla (A) alla (E), appena scritte. Scegliamo, quindi, le prime quattro:

$$\begin{cases} 5v_1 + v_2 - v_3 - 2v_4 = 60 & \text{(A)} \\ 4v_1 + 2v_2 - 5v_3 - 16v_4 = 0 & \text{(B)} \\ v_1 - v_2 = 20 & \text{(C)} \\ -3v_1 + v_3 + 2v_4 = 0 & \text{(D)} \end{cases}$$

dalla (C) si ha $v_2 = v_1 - 20$, e sostituendo questa nelle (A) e (B), si ottiene:

$$\begin{cases} -3v_1 + v_3 + 2v_4 = 0 & \text{(D)} \\ 5v_1 + v_1 - 20 - v_3 - 2v_4 = 60 & \text{(A')} \\ 4v_1 + 2v_1 - 40 - 5v_3 - 16v_4 = 0 & \text{(B')} \end{cases}$$

per cui:

$$\begin{cases} -3v_1 + v_3 + 2v_4 = 0 & \text{(D)} \\ 6v_1 - v_3 - 2v_4 = 80 & \text{(A')} \\ 6v_1 - 5v_3 - 16v_4 = 40 & \text{(B')} \end{cases}$$

che in forma matriciale diventa:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & -2 \\ 6 & -5 & -16 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 80 \\ 40 \end{vmatrix}$$

risolvendo il sistema ottenuto, si ricavano le tensioni di nodo incognite e, di conseguenza, le correnti di ramo utilizzando la legge di Ohm.

$$i_1 = \frac{v_1 - v_4}{3}$$
$$i_2 = \frac{v_1}{2}$$
$$i_3 = \frac{v_3 - v_2}{6}$$
$$i_4 = \frac{v_4}{1}$$
$$i_5 = \frac{v_3}{4}$$

Analisi agli anelli (metodo delle correnti degli anelli)

Analisi degli in assenza di generatori di corrente

Si definisce *anello* una maglia che non contiene rami al proprio interno. Nell'analisi agli anelli si applica la KVL per trovare le correnti incognite che non son altro che le correnti di anello. L'analisi agli anelli non possiede però l'applicabilità generale che è propria dell'analisi nodale: essa infatti è applicabile soltanto ai circuiti planari. Un circuito *planare* è un circuito che può essere disegnato in un piano senza che vi siano rami che si incrociano, un circuito che non è planare, è detto *non planare*. In ogni caso, un circuito può avere rami che si incrociano ed essere comunque planare se esiste un modo di ridisegnarlo senza gli incroci (fig. 8).

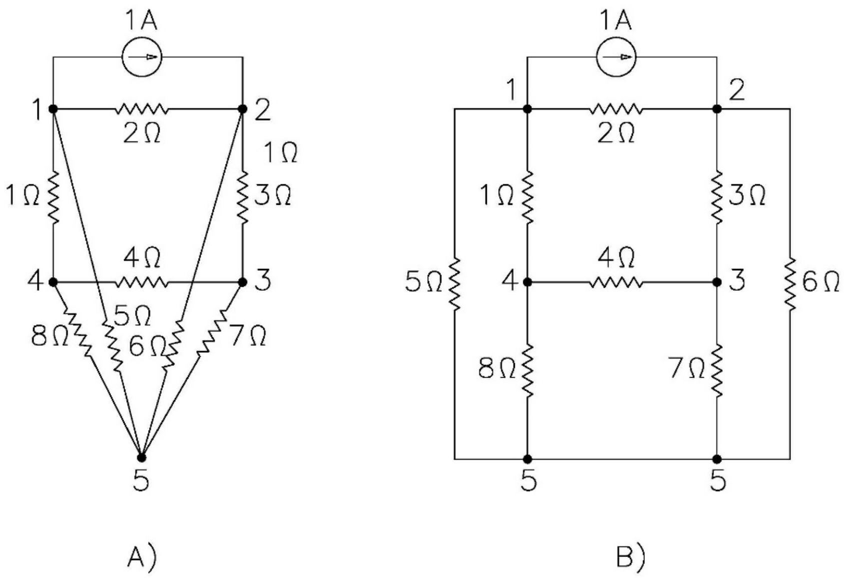


Fig. 8 – A) Circuito planare con rami incrociati; B) Stesso circuito senza incroci

Anche il metodo dell'analisi agli anelli si può sintetizzare in quattro semplici passi.

- *Passo 1*: assegnare le correnti di anello i_1, i_2,…… i_n agli n anelli;
- *Passo 2*: applicare, a ciascuno degli n anelli, la legge di Kirchhoff delle tensioni;
- *Passo 3*: utilizzare la legge di Ohm per esprimere le tensioni di ramo in funzione delle correnti di anello;
- *Passo 4*: risolvere il sistema ottenuto calcolando, così, le correnti di anello e, quindi, le correnti di ramo.

Applichiamo ora questo metodo alla rete di figura 9.

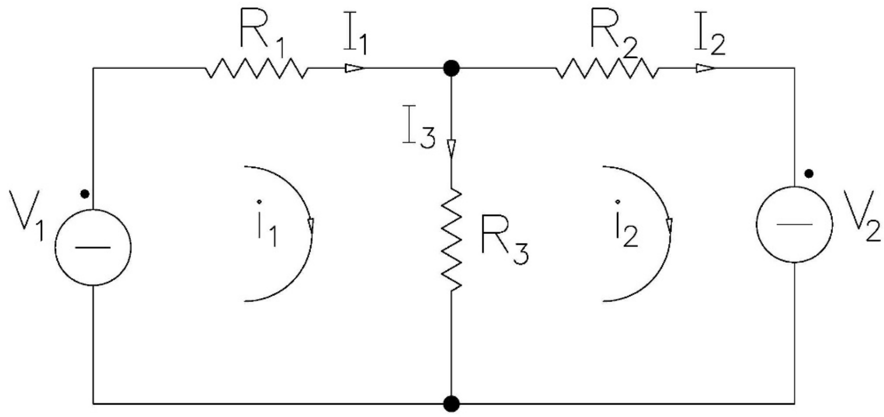


Fig. 9

- *Passo 1*: assegniamo le correnti di anello i_1 e i_2, ai due anelli;
- *Passo 2*: applichiamo, a ciascuno dei due anelli, la legge di Kirchhoff delle tensioni;

Anello 1) $\qquad V_1 = v_{R1} + v_{R3}$

Anello 2) $\qquad -V_2 = -v_{R3} + v_{R2}$

Passo 3: utilizziamo la legge di Ohm per esprimere le tensioni di ramo in funzione delle correnti di anello;

Anello 1) $\qquad V_1 = R_1 i_1 + R_3(i_1 - i_2)$

$V_1 = i_1(R_1 + R_3) - R_3 i_2$

Anello 2) $\qquad -V_2 = -R_3(i_1 - i_2) + R_2 i_2$

$-V_2 = -R_3 i_1 + i_2(R_2 + R_3)$

Quindi il sistema è:

$$\begin{cases} V_1 = i_1(R_1 + R_3) - R_3 i_2 \\ -V_2 = -R_3 i_1 + i_2(R_2 + R_3) \end{cases}$$

ed in forma matriciale:

$$\begin{vmatrix} (R_1 + R_3) & -R_3 \\ -R_3 & (R_2 + R_3) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{vmatrix}$$

- *Passo 4*: risolvendo il sistema ottenuto, si ricavano le correnti di anello incognite e, di conseguenza, le correnti di ramo:

$$I_1 = i_1$$
$$I_2 = i_2$$
$$I_3 = i_1 - i_2$$

Analisi agli anelli in presenza di generatori di corrente
Anche qui abbiamo due casi,

- ***Caso 1***: il generatore di corrente fa parte di un solo anello, figura 10:

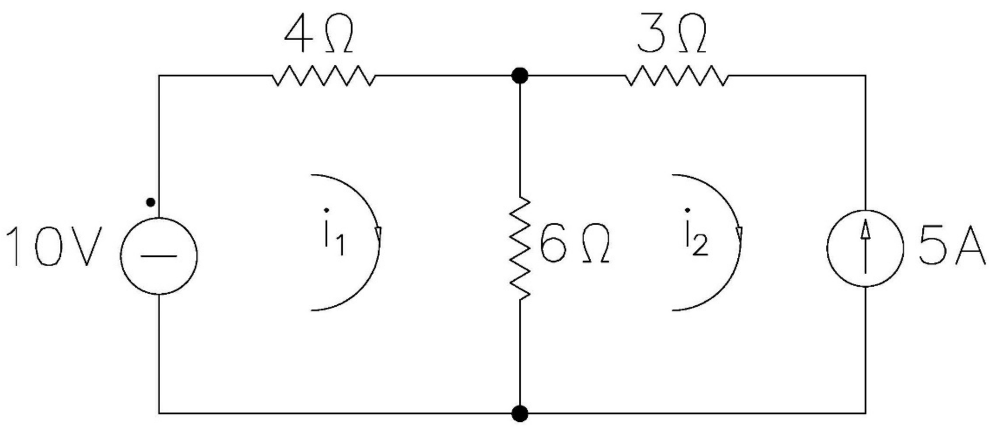


Fig. 10

si ha, $i_2 = -5A$ e si scrivono, nella consueta maniera, le equazioni per gli altri anelli.

$$10 = 4i_1 + 6(i_1 - i_2)$$

da cui

$$10 = 4i_1 + 6(i_1 + 5)$$

$$10 = 4i_1 + 6i_1 + 30$$

$$10 = 10i_1 + 30$$

ed infine

$$i_1 = -2A$$

- ***Caso 2***: il generatore di corrente fa parte di due anelli, figura 11. Si ottiene un s*uperanello* escludendo il generatore di corrente e tutti gli eventuali elementi collegati in serie ad esso.

In generale si ha un superanello quando due anelli hanno un generatore di corrente (indipendente o controllato) in comune.

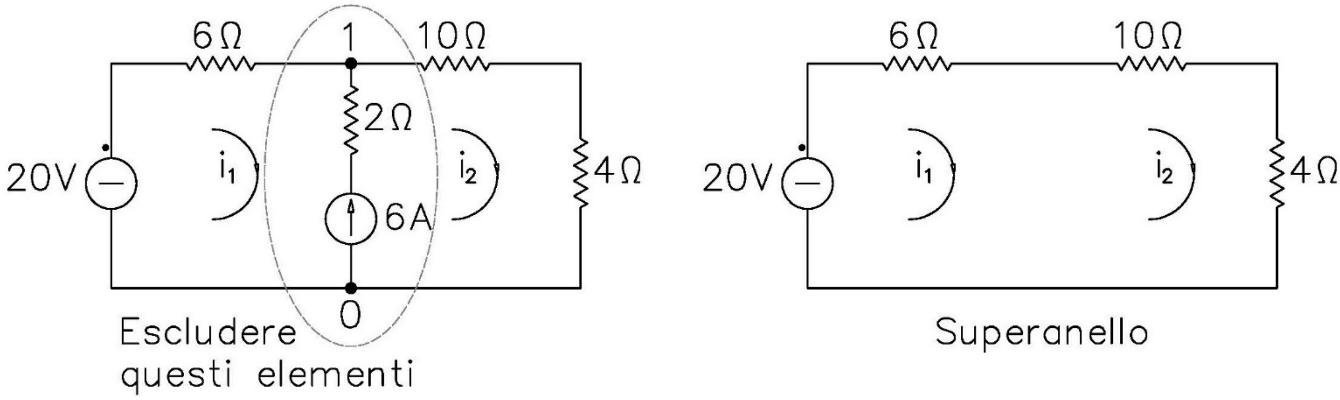


Fig. 11

KVL al superanello $$20 = 6i_1 + 10i_2 + 4i_2$$

$$20 = 6i_1 + 14i_2 \qquad (A)$$

KCL ad un nodo del ramo di intersezione dei due anelli, per esempio al nodo 0:

$$i_2 = 6 + i_1 \qquad (B)$$

e quindi avremo il sistema:

$$\begin{cases} 20 = 6i_1 + 14i_2 \\ i_2 = 6 + i_1 \end{cases}$$

che risolto ci darà i valori:

$$i_1 = -3.2A$$
$$i_2 = 2.8A$$

E' bene ricordare le seguenti *proprietà di un superanello*:

- il generatore di corrente del superanello non può essere trascurato, esso fornisce un'equazione di vincolo necessaria al calcolo delle correnti di anello;
- un superanello non ha una corrente propria;
- ad un superanello occorre applicare sia la KCL, sia la KVL.

Esempio
Sia data la rete riportata in figura 12, si applichi alla stessa l'analisi agli anelli:

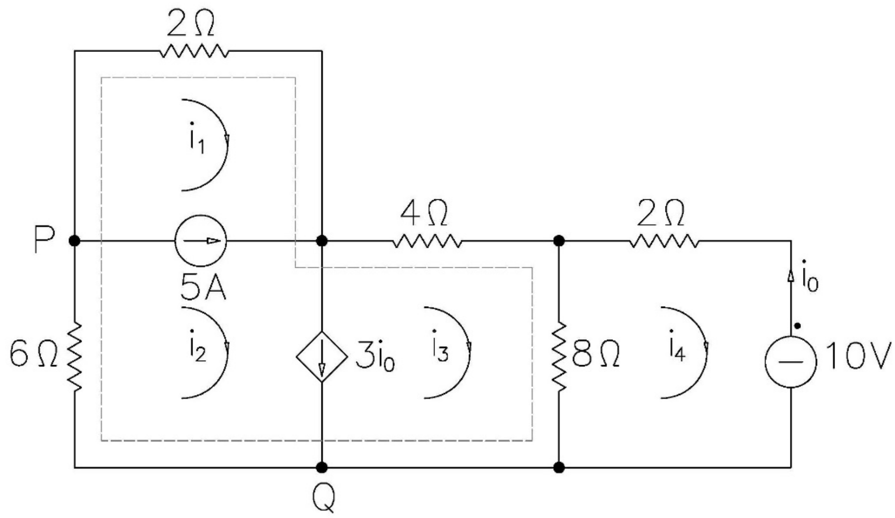


Fig. 12

Gli anelli 1 e 2 formano un superanello avendo un generatore di corrente indipendente in comune; anche gli anelli 2 e 3 formano un superanello perché hanno un generatore di corrente controllato in comune. I due superanelli si intersecano e formano un superanello più grande.

KVL al superanello più grande:

$$2i_1 + 4i_3 + 8(i_3 - i_4) + 6i_2 = 0$$

$$i_1 + 3i_2 + 6i_3 - 4i_4 = 0 \qquad (A)$$

Per il generatore indipendente di corrente applichiamo la KCL al nodo P:

$$i_2 = i_1 + 5 \qquad (B)$$

Per il generatore controllato di corrente applichiamo la KCL al nodo Q:

$$i_2 = 3i_0 + i_3$$

ma $i_0 = -i_4$ per cui:

$$i_2 = i_3 - 3i_4 \qquad (C)$$

Applicando ora la KVL all'anello 4 otteniamo.

$$-10 = 8(i_4 - i_3) + 2i_4$$

$$-5 = 5i_4 - 4i_3 \qquad (D)$$

e, infine, abbiamo il sistema:

$$\begin{cases} i_1 + 3i_2 + 6i_3 - 4i_4 = 0 & (A) \\ i_2 = i_1 + 5 & (B) \\ i_2 = i_3 - 3i_4 & (C) \\ -5 = 5i_4 - 4i_3 & (D) \end{cases}$$

che risolto dà come risultato:

$$\begin{gathered} i_1 = -7.5A \\ i_2 = -2.5A \\ i_3 = 3.9A \\ i_4 = 2.1A \end{gathered}$$

Scrittura diretta delle equazioni dell'analisi nodale e dell'analisi agli anelli

Analisi Nodale

Solo nel caso in cui ***tutti i generatori del sistema sono generatori indipendenti di corrente***, figura 13, possiamo scrivere, come già dimostrato:

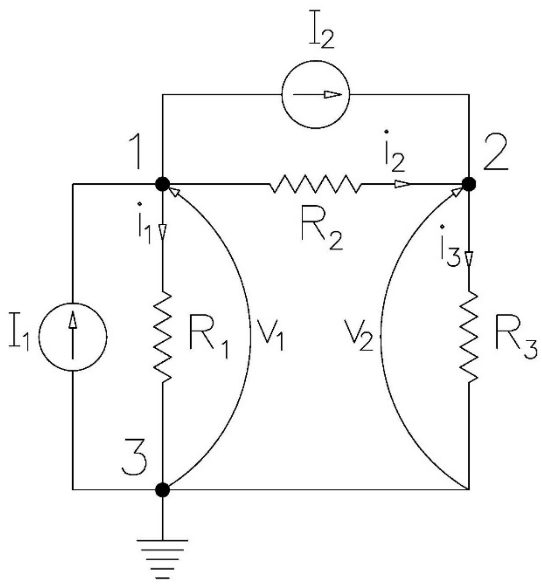


Fig. 13

$$\begin{vmatrix} (G_1+G_2) & -G_2 \\ -G_2 & (G_2+G_3) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_1 - I_2 \\ I_2 \end{vmatrix}$$

Quindi in forma generale si ha:

$$\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & .. & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & .. & G_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ G_{n1} & G_{n2} & .. & G_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ .. \\ v_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ .. \\ i_n \end{vmatrix}$$

o, in formulazione più sintetica:

$$\boldsymbol{Gv = i}$$

con

$\boldsymbol{G}$	matrice delle conduttanze;
$\boldsymbol{v}$	vettore delle uscite,
$\boldsymbol{i}$	vettore degli ingressi.

dove:

G_{kk}	Somma delle conduttanze collegate al nodo k
$G_{kj} = G_{jk}$	Somma, cambiata di segno, delle conduttanze che uniscono direttamente il nodo k ed il nodo j, k≠j
v_k	Tensione incognita del nodo k
i_k	Somma delle correnti dei generatori indipendenti di corrente collegati al nodo k, con le correnti entranti al nodo considerate positive.

Analisi agli Anelli
Solo nel caso in cui ***tutti i generatori del sistema sono generatori indipendenti di tensione***, figura 14, possiamo scrivere, come già dimostrato:

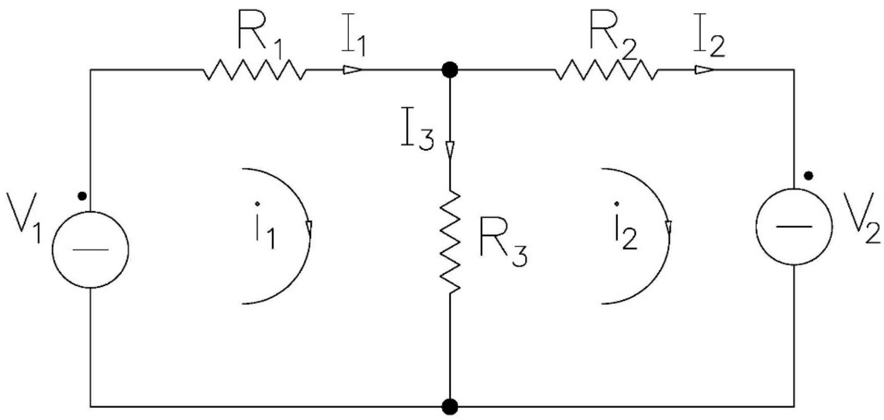


Fig. 14

$$\begin{vmatrix} (R_1 + R_3) & -R_3 \\ -R_3 & (R_2 + R_3) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{vmatrix}$$

Quindi in forma generale si ha:

$$\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & .. & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & .. & R_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ R_{n1} & R_{n2} & .. & R_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ .. \\ i_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ .. \\ v_n \end{vmatrix}$$

o, in formulazione più sintetica:

$$\boldsymbol{Ri} = \boldsymbol{v}$$

con

$\boldsymbol{R}$	matrice delle resistenze;
$\boldsymbol{i}$	vettore delle uscite,
$\boldsymbol{v}$	vettore degli ingressi.

dove:

R_{kk}	Somma delle resistenze che costituiscono l'anello k
$R_{kj} = R_{jk}$	Somma, cambiata di segno, delle resistenze comuni agli anelli k e j, k≠j
i_k	Corrente incognita dell'anello k, positiva in senso orario
v_k	Somma algebrica, in senso orario, dei generatori indipendenti di tensione che costituiscono l'anello k.

In queste condizioni, quindi, per entrambi i metodi, è possibile scrivere immediatamente le matrici risolutive dei sistemi senza riflettere più di tanto, ma seguendo semplicemente le regole prima riportate. In quest'ottica si capisce bene perché questi metodi, in queste condizioni, sono anche detti *metodi sistematici*.

Sommario