UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MESSINA
Dipartimento di Ingegneria
Contrada Di Dio I, 98166 – Villaggio S. Agata Messina

Appunti Corso di Elettrotecnica

Campo Elettrico e Condensatori

Anno Accademico 2023-2024

prof. ing. Bruno Azzerboni

Fonti:
Lezioni di Elettrotecnica Generale *- Giulio Battistini*
Colombo Cursi Pisa

Campo elettrico e condensatori

Ricordiamo che dato un campo elettrico E, si definisce induzione elettrica la quantità $D = \varepsilon E$, dove ε rappresenta la costante dielettrica assoluta del materiale, ed è legata alla costante dielettrica del vuoto mediante la relazione $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ dove ε_r è la costante dielettrica relativa del materiale in esame. Una conseguenza di quanto detto è che il campo d'induzione elettrica, a differenza del campo elettrico, dipende dal materiale che si sta considerando, inoltre è possibile scrivere la legge di Gauss in due modi differenti, infatti si ha:

$$\oint_S \bar{E} \cdot \bar{n} ds = \frac{q}{\varepsilon} \qquad\qquad \oint_S \bar{D} \cdot \bar{n} ds = q$$

È da precisare comunque che il legame tra $\bar{D}$ ed $\bar{E}$ non è sempre lineare, in realtà al variare del campo elettrico, $\bar{D}$ descrive il ciclo di fig.1, dove $\bar{E}c$ prende il nome di campo coercitivo, e rappresenta il valore che è necessario il campo elettrico abbia affinché sia $\bar{D} = 0$.

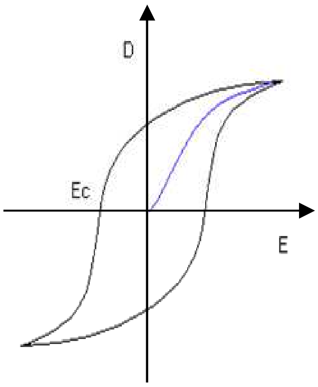

Fig. 1

Un condensatore è un qualunque sistema costituito da due conduttori affacciati tra i quali è posto un materiale isolante, i due conduttori prendono il nome di armature, mentre il materiale isolante viene comunemente chiamato dielettrico e le sue funzioni sono principalmente due, la prima è di evitare che si verifichino scariche tra i due conduttori in seguito all'applicazione di una d.d.p. tra le armature, la seconda è quella come vedremo di aumentare a parità di dimensioni la capacità di questo tipo di dispositivi.
Il simbolo circuitale del condensatore è quello di fig.2.

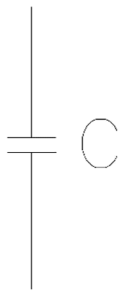

Fig. 2

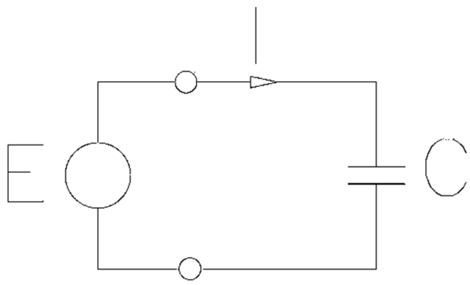

Fig. 3

Vediamo adesso di capire cosa s'intende per capacità, consideriamo a tal proposito la fig.3. La conseguenza dell'applicazione di una d.d.p. ai morsetti del condensatore è principalmente la distribuzione della carica sulle sue armature, ovviamente se il sistema è inizialmente neutro (carica netta nulla) dovrà continuare ad esserlo, questo significa che si ha un semplice trasferimento di carica da un'armatura all'altra e non come si potrebbe, in maniera assurda, pensare una generazione di carica. La funzione del generatore è proprio quella di fornire il lavoro necessario affinché questo processo possa avvenire, tuttavia in seguito a questo avvenimento si stabilisce un campo elettrico tra le armature del dispositivo che potrebbe assumere valori così intensi da provocare una scarica disruptiva tra le armature danneggiando il dielettrico, il valore del campo per il quale ciò si verifica dipende dalla rigidità dielettrica del materiale che rappresenta il massimo valore di campo elettrico al quale il dielettrico è capace di resistere, tale quantità è quindi misurata in V/m.
Ad un certo punto verrà raggiunta una condizione di equilibrio, in altre parole il trasferimento di carica da un'armatura all'altra si arresta.

Per carica accumulata da un condensatore s'intende quindi il valore assoluto della carica su una delle due armature, ovviamente da quanto detto si capisce che questa dipende dalla d.d.p. applicata, questa dipendenza è lineare e si definisce capacità proprio il coefficiente che lega la d.d.p. alla carica, pertanto vale la relazione

$$C = \frac{q}{V}$$

Vediamo adesso come, mediante l'utilizzo del teorema di Gauss e attraverso la definizione di ddp, sia possibile calcolare la capacità di un condensatore e scopriremo anche che la capacità dipende esclusivamente dalle caratteristiche geometriche del condensatore e dal tipo di materiale usato come dielettrico.

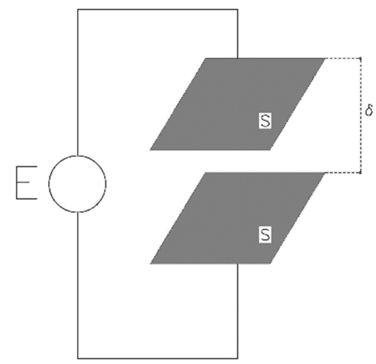

Fig. 4

Consideriamo ad esempio il condensatore ad armature piane di superficie S poste ad una distanza δ l'una dall'altra illustrato in fig. 4, scegliendo come superficie gaussiana un parallelepipedo contenente una delle armature, la legge di Gauss diventa:

$$q = DS$$

Essendo $D = \varepsilon E$ si ha:

$$q = \varepsilon ES$$

da cui

$$E = \frac{q}{\varepsilon S}$$

ricordando la definizione di ddp e integrando lungo una linea di campo si ha

$$V = \int_0^\delta E d\delta = \int_0^\delta \frac{q}{\varepsilon S} d\delta = \frac{q\delta}{\varepsilon S}$$

ed essendo

$$C = \frac{q}{V}$$

avremo

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{q\delta}{\varepsilon S}} = q\frac{\varepsilon S}{q\delta} = \varepsilon \frac{S}{\delta}$$

Pertanto, come avevamo accennato, è possibile notare che la capacità dipende esclusivamente dalle caratteristiche geometriche (S e δ) e dal dielettrico (ε_r), è ovvio pertanto che per ottenere grosse capacità e piccoli ingombri conviene usare materiali con un'alta costante dielettrica relativa.

È possibile seguire lo stesso procedimento per determinare la capacità del condensatore ad armature sferiche la cui sezione è illustrata in fig.5.

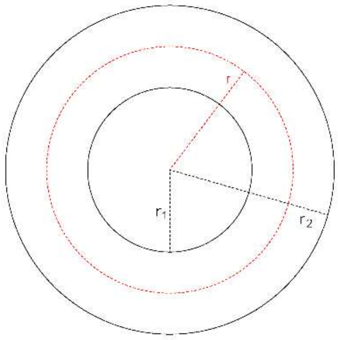

Fig. 5

Questa volta è conveniente scegliere come superficie gaussiana una superficie concentrica alle armature, tale scelta è vantaggiosa in quanto ci permette di affermare che il campo elettrico lungo la superficie è costante ed inoltre ortogonale alla superficie stessa (campo radiale), dalla legge di Gauss si ottiene quindi

$$q = DS = 4\pi r^2 D = 4\pi r^2 \varepsilon E$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

calcoliamo pertanto la ddp integrando lungo una linea di campo e pertanto lungo un raggio

$$V = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \left[-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

sostituendo questo risultato nella formula per il calcolo della capacità si ha

$$C = \frac{q 4\pi\varepsilon}{q} \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} = 4\pi\varepsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

Per il calcolo della capacità di un condensatore ad armature cilindriche si procede esattamente allo stesso modo, l'unica differenza sta nel fatto che la superficie gaussiana deve essere cilindrica e pertanto si avrà $S = 2\pi r l$ dove l è la lunghezza del cilindro.
Svolgendo i calcoli si avrà:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

Collegamento tra condensatori

Condensatori collegati in serie

Siano dati i bipoli C_1 e C_2 collegati in serie, vogliamo trovare la capacità che deve avere un condensatore affinché sia equivalente ai due condensatori collegati in serie.

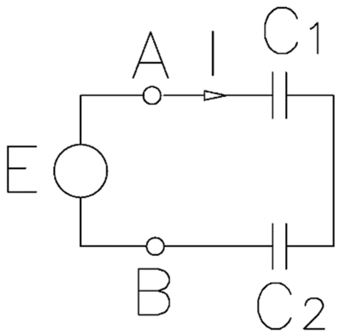

Fig. 6

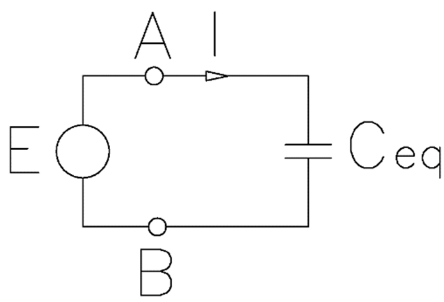

Fig. 7

Dalla fig.6 è possibile osservare che essendo i condensatori collegati in serie, la stessa corrente fluirà attraverso le capacità e, quindi, la medesima carica si distribuirà sulle armature dei due condensatori per cui la carica Q_1 sarà uguale alla Q_2. Dovendo inoltre essere

$$E = V_{C1} + V_{C2}$$

Si avrà:

$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

Per cui dovrà essere:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

in altre parole il reciproco della capacità equivalente è dato dalla somma dei reciproci delle singole capacità

In generale se abbiamo N capacità collegate in serie, possiamo sostituire all'intera serie la capacità equivalente di valore (fig. 7):

$$C_{eq} = \frac{1}{\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{C_k}}$$

Condensatori collegati in parallelo
Vediamo adesso di trovare la capacità che deve avere un condensatore affinché sia equivalente a più condensatori connessi in parallelo o in serie. Consideriamo dapprima la connessione in parallelo pertanto facciamo riferimento alla fig.8, ricordando la definizione di sistema equivalente data in precedenza, risulta chiaro che a parità di d.d.p. applicata è necessario che la carica accumulata dal condensatore equivalente sia pari alla carica accumulata dall'intero sistema.

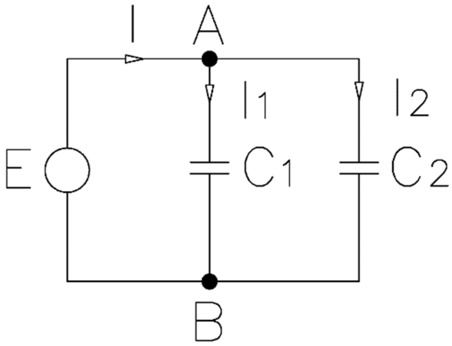

Fig. 8

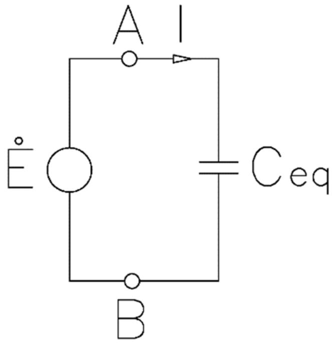

Fig. 9

Deve essere pertanto

$$Q = Q_1 + Q_2$$

ma essendo

$$Q = C_{eq}V$$
$$Q_1 = C_1V$$
$$Q_2 = C_2V$$

sì ha

$$C_{eq}V = C_1V + C_2V$$

Da cui deduciamo che

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

In generale se abbiamo N capacità collegate in parallelo, possiamo sostituire all'intero parallelo la capacità equivalente di valore (fig. 9):

$$C_{eq} = \sum_{k=1}^{n} C_k$$

Energia immagazzinata nel condensatore
Come ben noto, la potenza che interessa un bipolo è data dalla relazione:

$$p = vi$$

Dalla definizione di capacità:

$$C = \frac{q}{v}$$

Otteniamo:

$$q = Cv$$

quindi la corrente che interessa il condensatore è:

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt}$$

da cui:

$$p = vi = vC\frac{dv}{dt}$$

Sapendo che l'energia è l'integrale nel tempo della potenza, otteniamo che l'energia immagazzinata nel condensatore (energia elettrostatica) sarà:

$$W_e = \int p dt = \int vC\frac{dv}{dt}dt = C\int v dv = \frac{1}{2}Cv^2$$

Quindi poiché l'energia immagazzinata nel condensatore dipende dalla tensione ai morsetti del condensatore stesso, possiamo affermare che il condensatore è un bipolo inerziale rispetto alla propria tensione.
Questo significa che il condensatore non potrà permettere variazioni finite in tempo zero della propria tensione; se invece ciò avvenisse avremmo che la potenza

$$p = \frac{dW_e}{dt}$$

sarebbe infinita e ciò è un assurdo fisico.

Carica e scarica di C

Abbiamo visto che un condensatore C immagazzina una energia pari a:

$$W_e = \frac{1}{2} C v^2$$

Ipotizziamo di avere un condensatore inizialmente scarico $w_e = 0$ ed esaminiamo la fig. 10 nella quale, con il tasto T nella posizione di figura, la tensione ai morsetti del condensatore e la corrente nella maglia sono nulle.
Spostando T nella posizione 1 (fig. 10A) nel circuito comincerà a fluire una corrente e, quindi, ai morsetti del condensatore nascerà una tensione che varierà con continuità nel tempo poiché, come sappiamo, il condensatore è inerziale rispetto alla propria tensione e, quindi, quest'ultima non arriverà istantaneamente al valore di regime permanente.

Alla fine del fenomeno quindi, il condensatore avrà immagazzinato una certa energia w_e; *definiamo ora transitorio l'intervallo di tempo che necessita ad un sistema per passare da uno stato energetico iniziale ad uno stato energetico finale.*

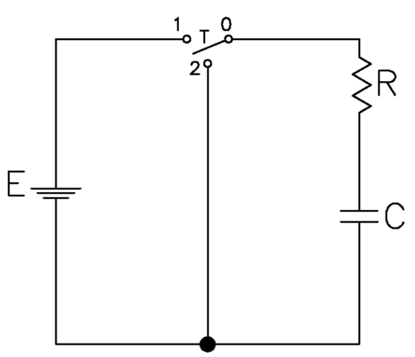

Fig. 10

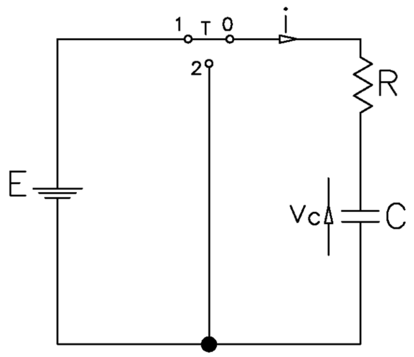

Fig. 10A

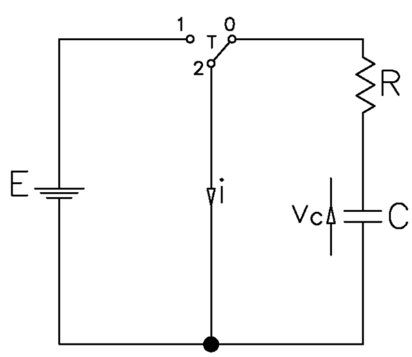

Fig. 10B

Fissato il senso di percorrenza della maglia di fig. 10A concorde alla corrente, scriveremo:

$$E - v_c = Ri$$

ed essendo

$$i = C \frac{dv_c}{dt}$$

avremo:

$$E - v_c = RC \frac{dv_c}{dt}$$

Questa è una equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili e, per risolverla, ci occorre la condizione iniziale sulla tensione che, ovviamente, è:

$$v_c(0) = 0$$

La soluzione dell'equazione è:

$$v_c = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Alla fine del transitorio (*transitorio di carica*) cioè per $t \to \infty$ avremo:

$$v_c = E$$

Se lasciamo il tutto inalterato siamo in condizione di regime permanente e la tensione sarà $v_c = E$ finché non altereremo il sistema.

È evidente che la corrente, che prima della commutazione del tasto in posizione 1 è nulla, nell'istante in cui commuto il tasto nella posizione 1 scatta al valore:

$$i = \frac{E}{R}$$

Infatti dall'equazione

$$E - v_c = Ri$$

Essendo per $t = 0$, $v_c(0) = 0$ sì ha

$$E - 0 = Ri \quad da\ cui \quad i = \frac{E}{R}$$

A regime permanente la corrente sarà di nuovo nulla, infatti dall'equazione

$$E - v_c = Ri$$

Essendo per $t = \infty$, $v_c(\infty) = E$ sì ha

$$E - E = Ri \quad da\ cui \quad 0 = Ri \ \ per\ cui \ \ i = 0$$

Spostiamo ora il tasto T in posizione 2 (fig. 10B) e scriviamo l'equazione alla maglia scegliendo il senso di percorrenza concorde al verso della corrente:

$$v_c = Ri$$

Quindi

$$v_c = Ri = RC\frac{dv_c}{dt}$$

Questa è una equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili e, per risolverla, ci occorre la condizione iniziale sulla tensione che, ovviamente, ora è:

$$v_c(0) = E$$

La soluzione dell'equazione è:

$$v_c = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

Alla fine del transitorio (*transitorio di scarica*) cioè per $t \to \infty$ avremo:

$$v_c = 0$$

La corrente all'inizio del transitorio di scarica scatterà immediatamente al valore:

$$i = -\frac{E}{R}$$

Il segno – perché è diretta in senso opposto al verso della corrente di carica, ed alla fine della scarica sarà nuovamente nulla.

L'andamento della tensione durante il transitorio di carica, il regime permanente ed il transitorio di scarica è riportato in fig. 11.

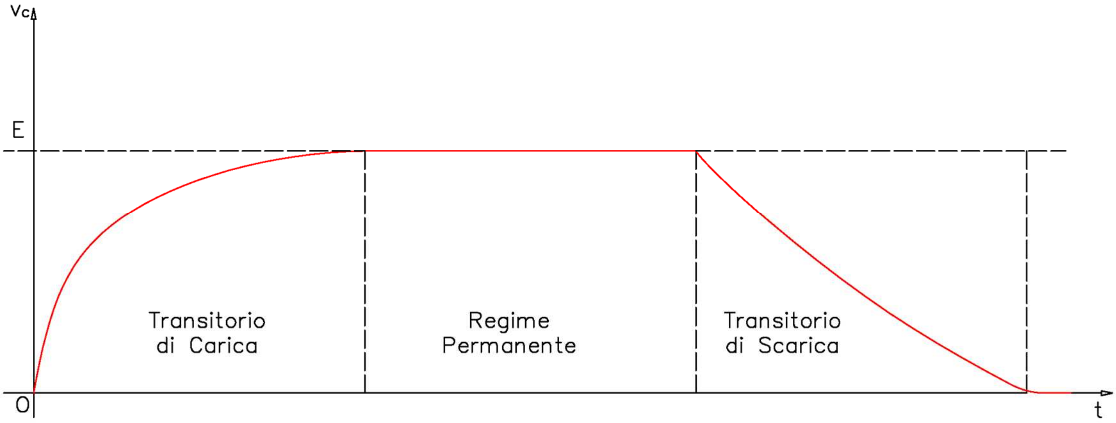

Fig. 11

L'andamento della corrente durante il transitorio di carica, il regime permanente ed il transitorio di scarica è riportato in fig. 12.

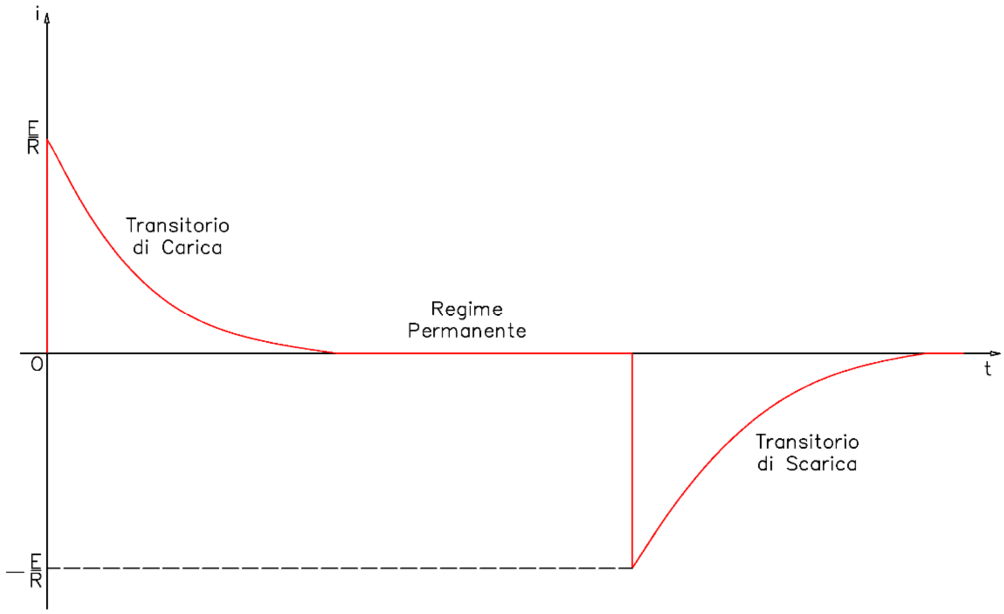

Fig. 12

Nelle espressioni della tensione durante i transitori, la costante τ si dice *costante di tempo*, e vale:

$$\tau = RC$$

e si misura in sec., infatti

$$R \to [\Omega] = \left[\frac{V}{A}\right]$$

Dalla definizione

$$C = \frac{Q}{V}$$

abbiamo

$$[F] = \left[\frac{Asec}{V}\right]$$

Per cui

$$\tau = RC = \left[\frac{V}{A}\frac{Asec}{V}\right] = [sec]$$

In definitiva, le espressioni istantanee delle tensioni transitorie sono:

$$v_c = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad transitorio\ di\ carica$$
$$v_c = Ee^{-\frac{t}{\tau}} \qquad transitorio\ di\ scarica$$

Notiamo che a regime permanente la tensione vale:

$$v_c = E$$

E la corrente vale:

$$i = 0$$

E quindi possiamo affermare che *a regime permanente continuo, il condensatore si comporta come un circuito aperto essendo infatti la corrente nulla*

Finora abbiamo studiato il transitorio di carica partendo da condizione iniziale nulla, se invece avessimo una condizione iniziale diversa da zero e cioè:

$$v_c(0) \neq 0$$

La soluzione sarebbe:

$$v_c = v_c(0)e^{-\frac{t}{\tau}} + E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Sommario