

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MESSINA  
*Dipartimento di Ingegneria*  
*Contrada Di Dio I, 98166 – Villaggio S. Agata Messina*

## ***Appunti Corso di Elettrotecnica***

***Generatori indipendenti di tensione e di corrente***

*Anno Accademico 2016-2017*

*prof. ing. Bruno Azzerboni*

***Fonti:***

***Lezioni di Elettrotecnica Generale - Giulio Battistini***

***Colombo Corsi Pisa***

***<https://it.wikipedia.org>***

## Generatori indipendenti di tensione e di corrente

### 1. La tensione ideale e generatori di corrente

Un generatore ideale è quel dispositivo (bipolo) che fornisce una quantità di energia praticamente infinita (generatore prevalente). I generatori ideali sono divisi in due tipi: generatori di tensione e generatori di corrente. Di questi due tipi, abbiamo più dimestichezza con il primo tipo, poiché pile (a secco o alcaline) e batterie acido-piombo sono tutti generatori di tensione (e non sono, certamente, ideali). E' difficile focalizzare nella mente un bipolo che possa comportarsi come un generatore ideale di corrente; si possono, comunque fare delle approssimazioni ragionevolmente buone di un generatore ideale. Un esempio potrebbe essere un generatore di tensione collegato in serie con una resistenza molto grande, questo erogherà una corrente piccolissima e costante, quindi si comporterà come se, di fatto, fosse un generatore ideale di corrente.

#### 1.1 Generatore ideale di tensione

Un generatore di tensione ideale è un bipolo che genera ed eroga una fissata tensione ai suoi morsetti.

La tensione erogata da un generatore ideale di tensione non è influenzata dalla corrente che esso deve fornire agli altri elementi circuitali, per cui un generatore ideale di tensione genera ed eroga una tensione indipendentemente dalla corrente che lo attraversa. La corrente erogata dal generatore è determinata dal circuito a esso collegato (fig. 1).

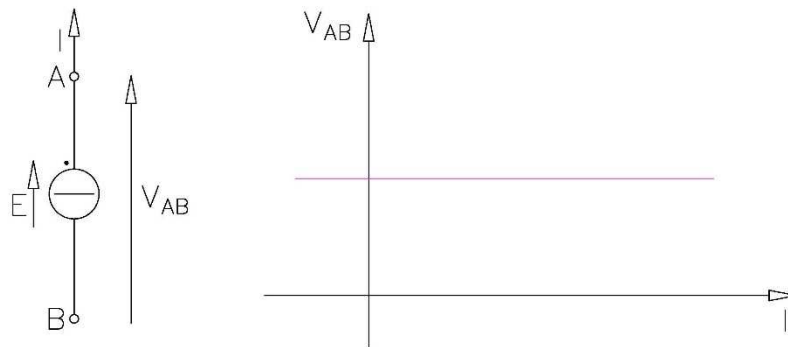


Figura 1 – Caratteristica esterna generatore ideale di tensione.

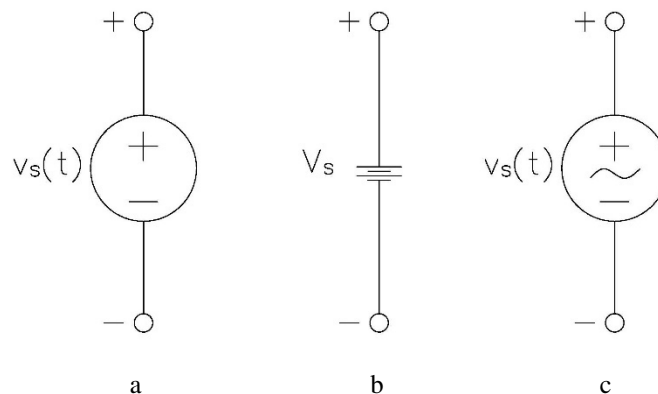


Figura 2 - Generatori ideali di tensione

La figura 2 illustra i vari simboli per i generatori di tensione che saranno usati in seguito. Il simbolo di tipo a) è quello generale; in generale, la tensione in uscita da un generatore ideale  $v_s(t)$  può essere funzione del tempo, ma può anche essere costante (in inglese indicata con la sigla DC = direct current). Il simbolo b) è invece usato nel solo caso specifico di generatori di tensione costante (è la batteria ideale). Infine, il simbolo c) è impiegato nel caso specifico di generatori di tensione sinusoidale ad esempio:  $v_s(t) = V_M \sin \omega t$ .

In generale, salvo diversa segnalazione, sarà usata la seguente notazione: un generico generatore di tensione sarà indicato con la lettera minuscola  $v$ . Se è necessario enfatizzare che il generatore produce una tensione che varia nel tempo, allora si userà la notazione  $v(t)$ . Infine, un generatore di tensione costante (DC) sarà indicato con la lettera maiuscola  $V$ . Si noti che per convenzione il verso positivo della corrente è quello uscente dal morsetto positivo del generatore.

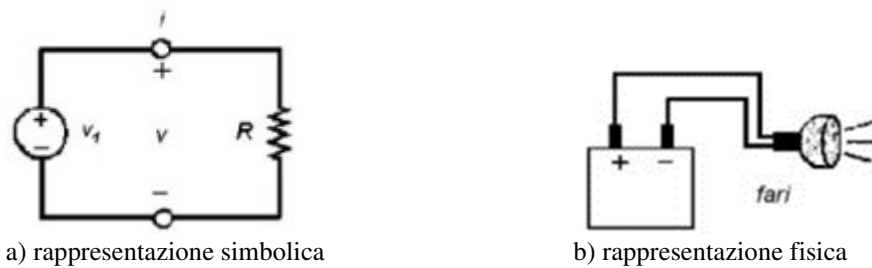


Figura 3 Varie rappresentazioni di un sistema elettrico

Consideriamo la figura 3, essa rappresenta il collegamento tra un generatore di energia e un resistore (cioè un bipolo passivo che dissipa energia, per esempio un corpo illuminante). Nella figura sono riportate due rappresentazioni diverse: simbolica e fisica; nell'analisi dei circuiti elettrici, noi scegliamo di rappresentare la realtà fisica di figura 3(b) tramite l'approssimazione fornita dagli elementi circuitali ideali, come raffigurato in figura 3(a).

### 1.2 Generatore ideale di corrente

Un *generatore ideale di corrente* è un bipolo in grado di generare ed erogare una corrente costante indipendentemente dal circuito cui è collegato. A tal fine, esso deve essere in grado di generare una tensione arbitraria ai suoi morsetti. La figura 4 mostra il simbolo usato per rappresentare il generatore ideale di corrente. Per analogia con la definizione di generatore ideale di tensione, possiamo scrivere:

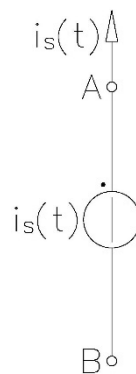


Figura 4 - Simbolo del generatore ideale di corrente

Un *generatore ideale di corrente* genera ed eroga la medesima corrente a qualsiasi circuito esso sia collegato. La tensione che si localizza ai morsetti del generatore è determinata, invece, dal circuito cui esso è collegato (Fig. 5).

La stessa convenzione vista per i generatori di tensione è usata per i generatori di corrente: si userà la lettera minuscola  $i$  per indicare un generico generatore di corrente, e la lettera maiuscola  $I$  per indicare un generatore di corrente continua.

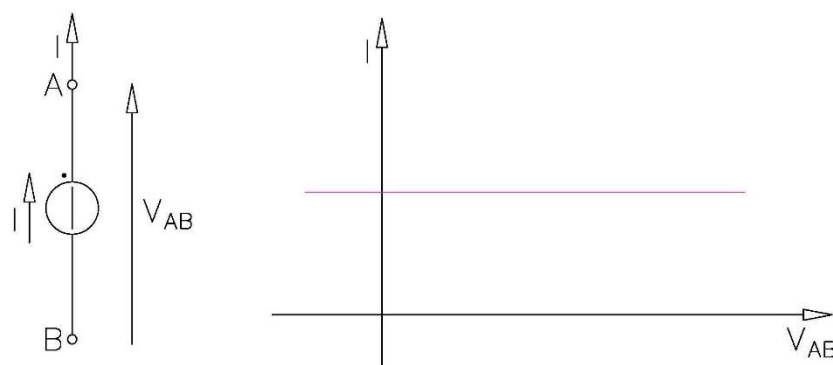


Figura 5 – Caratteristica esterna generatore ideale di corrente.

## 2. Generatori reali e resistenza serie e/o parallelo

Consideriamo il modello di un generatore ideale di tensione di Fig. 2. Colleghiamo ora una resistenza di carico  $R$ , se questa diminuisce, il generatore erogherà una corrente sempre maggior al fine di mantenere costante la tensione  $v_s(t)$  ai capi del resistore, essendo:

$$i_s(t) = v_s(t)/R$$

Questo suggerisce che al limite, se la resistenza di carico tende al valore zero, il generatore ideale di tensione deve fornire una quantità infinita di corrente al carico e questo è, chiaramente, impossibile. Vi è dunque un limite (per quanto grande esso possa essere) alla quantità di corrente che un generatore reale può fornire al carico. Fortunatamente, non è necessario addentrarsi troppo a fondo nella natura fisica di ciascun tipo di generatore per descrivere il comportamento di un generatore reale di corrente; le limitazioni di un generatore reale possono essere approximate abbastanza semplicemente tramite la nozione di **resistenza serie e/o parallelo di un generatore**.

### 2.1 Generatori reali di tensione

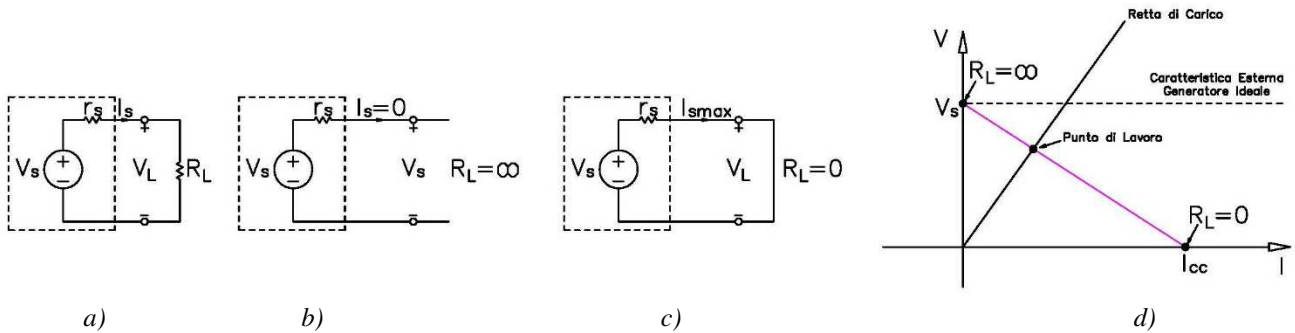


Figura 6 - Generatore reale di tensione e caratteristica I-V.

La figura 6a mostra un modello di generatore reale di tensione; questo è composto di un generatore ideale di tensione detto f.e.m. (forza elettromotrice),  $v_s$ , in serie con una resistenza,  $r_s$ . La resistenza  $r_s$  pone quindi un limite alla massima corrente che il generatore di tensione può fornire:

$$i_{smax} = v_s/r_s \quad (1.1)$$

Generalmente la resistenza serie  $r_s$  è piccola. Si noti, tuttavia, che la sua presenza si fa sentire sulla tensione ai capi della resistenza di carico, infatti, questa tensione non è più uguale alla tensione del generatore e la corrente erogata dal generatore è:

$$i_s = v_s/(r_s + R_L) \quad (1.2)$$

per cui la tensione ai capi del carico  $R_L$  risulta essere:

$$v_L = R_L i_s = v_s R_L / (r_s + R_L) \quad (1.3)$$

Quindi, se la resistenza interna  $r_s$  tende a zero, la tensione ai capi del carico (e dunque del generatore reale) diventa esattamente uguale alla tensione ai capi del generatore ideale. A sua volta, la relazione (1.2) ci dice che se la resistenza del carico  $R_L$  si annulla (cioè abbiamo un corto circuito, come in figura 6b), otteniamo il valore della massima corrente  $I_{cc}$  che può essere erogata dal generatore reale di tensione (equazione 1.1). Se invece se la resistenza del carico  $R_L$  tende a infinito (cioè abbiamo un circuito aperto), la tensione a vuoto  $V_0$  coincide con la tensione generata  $v_s$ .

La caratteristica  $i-v$  di un generatore reale di tensione (rappresentata in figura 6c) si ricava applicando la Ohm generalizzata ai morsetti esterni del generatore reale di figura 6a; si ottiene che la tensione erogata  $v_L$  è uguale alla tensione generata o f.e.m.  $v_s$ , meno la c.d.t. ai morsetti di  $r_s$ :

$$v_L = v_s - r_s i_s$$

È chiaro quindi che *una caratteristica desiderabile di un generatore reale di tensione è quella cui corrisponde una resistenza serie molto piccola*; in modo da poter soddisfare la richiesta di corrente di un carico arbitrario.

## 2.2 Generatori reali di corrente

Un'analoga modifica al modello del generatore ideale di corrente è utile per descrivere il comportamento di un generatore reale di corrente. Il circuito illustrato in figura 6a mostra una semplice rappresentazione di un generatore reale di corrente, consistente in un generatore ideale di corrente,  $i_s$ , in parallelo con un resistore  $r_s$ .

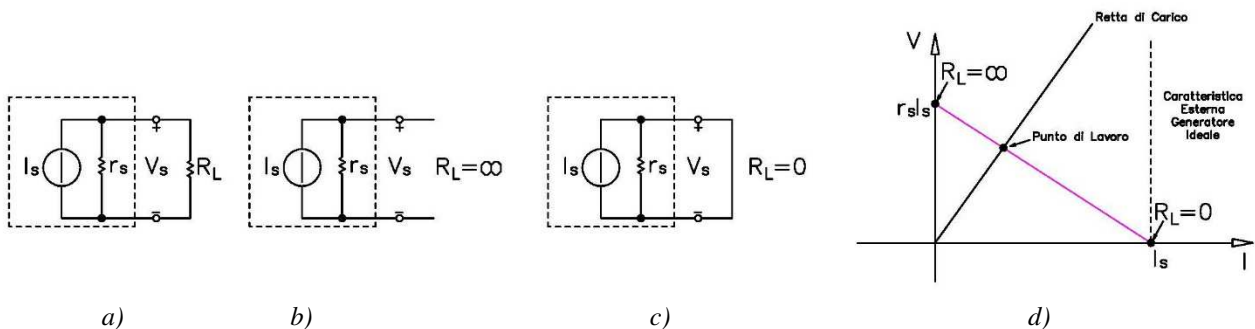


Figura 7 - Generatore reale di corrente e caratteristica I-V.

Si noti che se la resistenza di carico va all'infinito (cioè si ha un circuito aperto, figura 7b), la tensione in uscita del generatore reale di corrente va al limite:

$$v_{smax} = r_s i_s \quad (1.4)$$

che è la tensione massima erogata da un generatore reale di corrente. La caratteristica  $i-v$  di un generatore reale di corrente (rappresentata in figura 7c) si ricava applicando la legge di Kirchhoff delle correnti ad uno dei due nodi del circuito di figura 7a; quindi si ricava

$$i = i_s - G_s v_s$$

dove  $G_s$  è la conduttanza ed  $i$  la corrente che scorre nel carico  $R_L$ . Un buon generatore di corrente dovrebbe essere in grado di approssimare il comportamento di un generatore ideale di corrente. Pertanto, *una caratteristica desiderabile per il generatore di corrente è che la resistenza parallelo sia la più grande possibile*.

### 3. Parallelo e serie di generatori di tensione

#### 3.1 Collegamento parallelo

##### Generatori reali

Sia dato il sistema di figura 8:

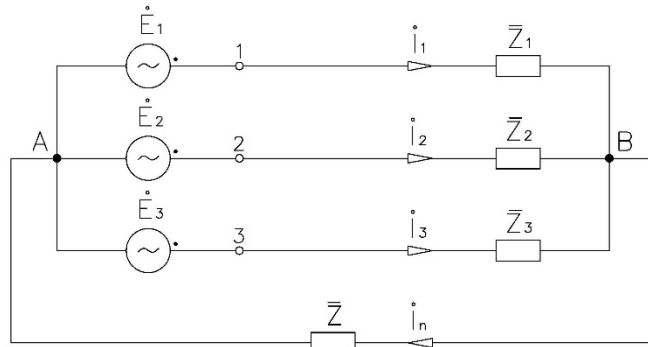


Fig. 8 – Collegamento parallelo generatori reali di tensione

vogliamo trovare il bipolo equivalente al parallelo dei tre generatori di tensione, il bipolo, cioè, che inserito tra i morsetti A e B fa sì che si abbia la medesima tensione e la medesima corrente ai morsetti A e B.

A tal fine scriviamo l'espressione della tensione ai morsetti A e B percorrendo uno alla volta i rami 1, 2 e 3 che collegano il nodo A con il nodo B.

$$\begin{aligned}\dot{V}_{AB} + \dot{E}_1 &= \bar{Z}_1 \dot{I}_1 \\ \dot{V}_{AB} + \dot{E}_2 &= \bar{Z}_2 \dot{I}_2 \\ \dot{V}_{AB} + \dot{E}_3 &= \bar{Z}_3 \dot{I}_3\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}\dot{V}_{AB} &= -\dot{E}_1 + \bar{Z}_1 \dot{I}_1 \\ \dot{V}_{AB} &= -\dot{E}_2 + \bar{Z}_2 \dot{I}_2 \\ \dot{V}_{AB} &= -\dot{E}_3 + \bar{Z}_3 \dot{I}_3\end{aligned}$$

dividiamo la prima equazione per  $\bar{Z}_1$ , la seconda per  $\bar{Z}_2$  e la terza per  $\bar{Z}_3$

$$\begin{aligned}\frac{\dot{V}_{AB}}{\bar{Z}_1} &= -\frac{\dot{E}_1}{\bar{Z}_1} + \dot{I}_1 \\ \frac{\dot{V}_{AB}}{\bar{Z}_2} &= -\frac{\dot{E}_2}{\bar{Z}_2} + \dot{I}_2 \\ \frac{\dot{V}_{AB}}{\bar{Z}_3} &= -\frac{\dot{E}_3}{\bar{Z}_3} + \dot{I}_3\end{aligned}$$

sommiamo membro a membro ed otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{\dot{V}_{AB}}{\bar{Z}_1} + \frac{\dot{V}_{AB}}{\bar{Z}_2} + \frac{\dot{V}_{AB}}{\bar{Z}_3} &= -\frac{\dot{E}_1}{\bar{Z}_1} - \frac{\dot{E}_2}{\bar{Z}_2} - \frac{\dot{E}_3}{\bar{Z}_3} + \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 \\ \dot{V}_{AB} \left( \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3} \right) &= - \left( \frac{\dot{E}_1}{\bar{Z}_1} + \frac{\dot{E}_2}{\bar{Z}_2} + \frac{\dot{E}_3}{\bar{Z}_3} \right) + \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3\end{aligned}$$

scriviamo ora l'equazione al nodo A

$$i_1 + i_2 + i_3 = i_n$$

e quindi, sostituendola, si ha

$$\dot{V}_{AB} \left( \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3} \right) = - \left( \frac{\dot{E}_1}{\bar{Z}_1} + \frac{\dot{E}_2}{\bar{Z}_2} + \frac{\dot{E}_3}{\bar{Z}_3} \right) + i_n$$

da cui

$$\dot{V}_{AB} = - \frac{\left( \frac{\dot{E}_1}{\bar{Z}_1} + \frac{\dot{E}_2}{\bar{Z}_2} + \frac{\dot{E}_3}{\bar{Z}_3} \right)}{\left( \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3} \right)} + \frac{i_n}{\left( \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3} \right)}$$

$$\dot{V}_{AB} = - \frac{\left( \frac{\dot{E}_1}{\bar{Z}_1} + \frac{\dot{E}_2}{\bar{Z}_2} + \frac{\dot{E}_3}{\bar{Z}_3} \right)}{\left( \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3} \right)} + \frac{1}{\left( \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3} \right)} i_n$$

il primo termine al secondo membro ha le dimensioni di una tensione ( $\frac{V/\Omega}{1/\Omega} = V$ ), il secondo di un'impedenza ( $\frac{1}{1/\Omega} = \Omega$ ), per cui indichiamo con

$$\dot{E}_M = \frac{\left( \frac{\dot{E}_1}{\bar{Z}_1} + \frac{\dot{E}_2}{\bar{Z}_2} + \frac{\dot{E}_3}{\bar{Z}_3} \right)}{\left( \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3} \right)} \quad e \quad \bar{Z}_M = \frac{1}{\left( \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3} \right)}$$

ed abbiamo

$$\dot{V}_{AB} = -\dot{E}_M + \bar{Z}_M i_n$$

questa è l'equazione della  $\dot{V}_{AB}$  calcolata nel seguente sistema

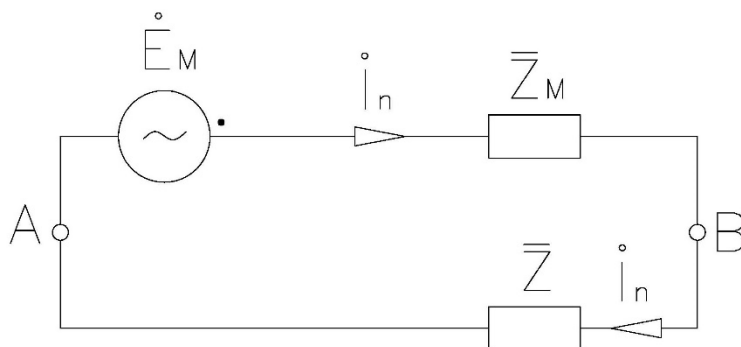


Fig. 9 – Generatore equivalente

Infatti

$$\dot{V}_{AB} + \dot{E}_M = \bar{Z}_M i_n$$

da cui

$$\dot{V}_{AB} = -\dot{E}_M + \bar{Z}_M \dot{I}_n \quad c. v. d.$$

Cioè, ai fini dei morsetti A e B, che ci sia il parallelo dei tre generatori o che ci sia questo solo generatore è equivalente, abbiamo così determinato il generatore equivalente del parallelo costituito da tre diversi generatori.

Questo generatore equivalente ha quindi una f.e.m. pari a

$$\dot{E}_M = \frac{\left( \frac{\dot{E}_1}{\bar{Z}_1} + \frac{\dot{E}_2}{\bar{Z}_2} + \frac{\dot{E}_3}{\bar{Z}_3} \right)}{\left( \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3} \right)}$$

e ricordando che

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}}$$

possiamo scrivere

$$\dot{E}_M = \frac{\dot{E}_1 \bar{Y}_1 + \dot{E}_2 \bar{Y}_2 + \dot{E}_3 \bar{Y}_3}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3}$$

ed un'impedenza serie pari a

$$\bar{Z}_M = \frac{1}{\left( \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3} \right)}$$

Se poniamo attenzione alla f.e.m., possiamo dire che questa f.e.m. è la media ponderata con peso le ammettenze equivalenti del ramo in cui è inserita la f.e.m.

Quanto finora detto si compendia nel *teorema di Millman*: *il parallelo di più generatori reali di tensione equivale ad un unico generatore reale di tensione la cui f.e.m. è pari alla media ponderata delle singole f.e.m. con peso le ammettenze equivalenti del ramo e la cui impedenza serie è il parallelo delle impedenze equivalenti di ciascun ramo.*

È importante notare che nel nostro caso tutte le f.e.m. sono concordi tra di loro, ma se così non fosse allora come si procede?



Ipotizziamo di avere un sistema come quello di figura 10

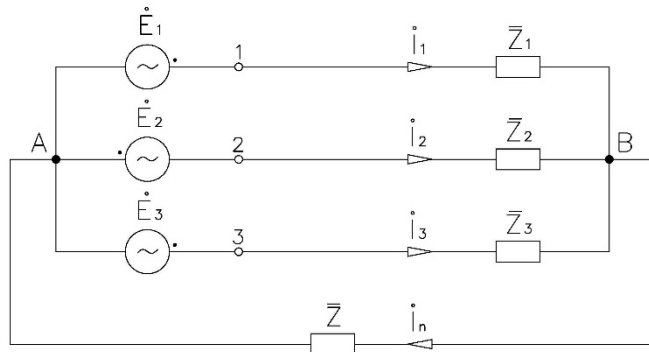


Fig. 10 - Collegamento parallelo generatori reali di tensione

quindi

$$\begin{aligned}\dot{V}_{AB} + \dot{E}_1 &= \bar{Z}_1 \dot{i}_1 \\ \dot{V}_{AB} - \dot{E}_2 &= \bar{Z}_2 \dot{i}_2 \\ \dot{V}_{AB} + \dot{E}_3 &= \bar{Z}_3 \dot{i}_3\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}\dot{V}_{AB} &= -\dot{E}_1 + \bar{Z}_1 \dot{i}_1 \\ \dot{V}_{AB} &= +\dot{E}_2 + \bar{Z}_2 \dot{i}_2 \\ \dot{V}_{AB} &= -\dot{E}_3 + \bar{Z}_3 \dot{i}_3\end{aligned}$$

dividiamo la prima equazione per  $\bar{Z}_1$ , la seconda per  $\bar{Z}_2$  e la terza per  $\bar{Z}_3$

$$\begin{aligned}\frac{\dot{V}_{AB}}{\bar{Z}_1} &= -\frac{\dot{E}_1}{\bar{Z}_1} + \dot{i}_1 \\ \frac{\dot{V}_{AB}}{\bar{Z}_2} &= +\frac{\dot{E}_2}{\bar{Z}_2} + \dot{i}_2 \\ \frac{\dot{V}_{AB}}{\bar{Z}_3} &= -\frac{\dot{E}_3}{\bar{Z}_3} + \dot{i}_3\end{aligned}$$

sommiamo membro a membro ed otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{\dot{V}_{AB}}{\bar{Z}_1} + \frac{\dot{V}_{AB}}{\bar{Z}_2} + \frac{\dot{V}_{AB}}{\bar{Z}_3} &= -\frac{\dot{E}_1}{\bar{Z}_1} + \frac{\dot{E}_2}{\bar{Z}_2} - \frac{\dot{E}_3}{\bar{Z}_3} + \dot{i}_1 + \dot{i}_2 + \dot{i}_3 \\ \dot{V}_{AB} \left( \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3} \right) &= - \left( \frac{\dot{E}_1}{\bar{Z}_1} + \frac{\dot{E}_2}{\bar{Z}_2} + \frac{\dot{E}_3}{\bar{Z}_3} \right) + \dot{i}_1 + \dot{i}_2 + \dot{i}_3\end{aligned}$$

scriviamo ora l'equazione al nodo A

$$\dot{i}_1 + \dot{i}_2 + \dot{i}_3 = \dot{i}_n$$

e quindi, sostituendola, si ha

$$\dot{V}_{AB} \left( \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3} \right) = - \left( \frac{\dot{E}_1}{\bar{Z}_1} - \frac{\dot{E}_2}{\bar{Z}_2} + \frac{\dot{E}_3}{\bar{Z}_3} \right) + \dot{I}_n$$

da cui

$$\dot{V}_{AB} = - \frac{\left( \frac{\dot{E}_1}{\bar{Z}_1} - \frac{\dot{E}_2}{\bar{Z}_2} + \frac{\dot{E}_3}{\bar{Z}_3} \right)}{\left( \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3} \right)} + \frac{\dot{I}_n}{\left( \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3} \right)}$$

$$\dot{V}_{AB} = - \frac{\left( \frac{\dot{E}_1}{\bar{Z}_1} - \frac{\dot{E}_2}{\bar{Z}_2} + \frac{\dot{E}_3}{\bar{Z}_3} \right)}{\left( \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3} \right)} + \frac{1}{\left( \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3} \right)} \dot{I}_n$$

$$\dot{E}_M = \frac{\left( \frac{\dot{E}_1}{\bar{Z}_1} - \frac{\dot{E}_2}{\bar{Z}_2} + \frac{\dot{E}_3}{\bar{Z}_3} \right)}{\left( \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3} \right)} \quad e \quad \bar{Z}_M = \frac{1}{\left( \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3} \right)}$$

$$\dot{E}_M = \frac{\dot{E}_1 \bar{Y}_1 - \dot{E}_2 \bar{Y}_2 + \dot{E}_3 \bar{Y}_3}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3}$$

$$\bar{Z}_M = \frac{1}{\left( \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3} \right)}$$

ed abbiamo

$$\dot{V}_{AB} = -\dot{E}_M + \bar{Z}_M \dot{I}_n$$

e questa è la medesima equazione che fornisce la  $\dot{V}_{AB}$  per il circuito di figura 9.

In pratica se facciamo attenzione ci accorgiamo che la  $\dot{E}_M$  ottenuta è diretta concordemente alla  $\dot{E}_1$  ed alla  $\dot{E}_3$  ed è discorde rispetto alla  $\dot{E}_2$ . In pratica quando abbiamo un parallelo fra generatori di tensione diretti discordemente l'uno dall'altro, dobbiamo prima scegliere il verso della  $\dot{E}_M$  e questa sarà sempre la media ponderata però saranno positive le f.e.m. concordi al verso da noi scelto e negative le f.e.m. discordi.

Esempio: si abbia il sistema di figura 11 e si voglia calcolare il generatore equivalente al parallelo dei due generatori

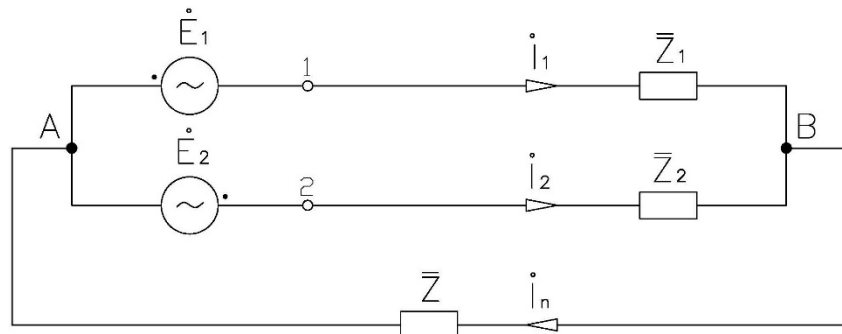


Fig. 11

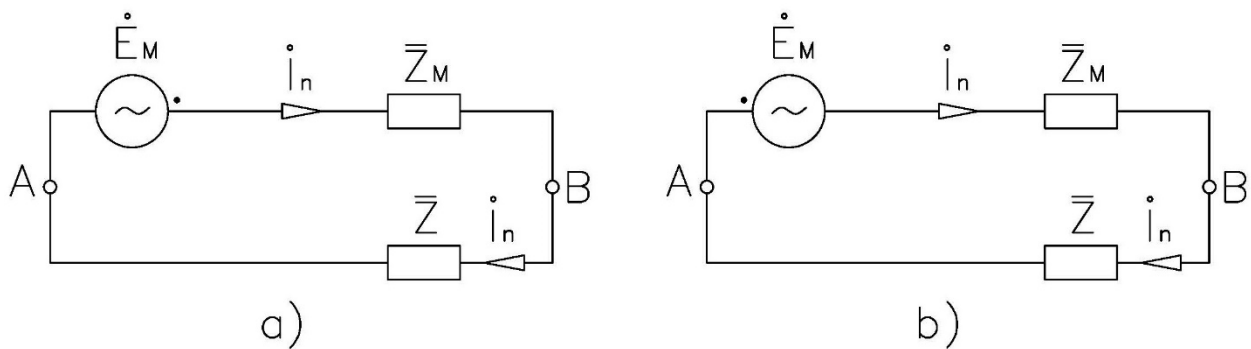


Fig. 12

se scegliessimo come equivalente il generatore di fig. 12a) avremmo

$$\dot{E}_M = \frac{-\dot{E}_1 \bar{Y}_1 + \dot{E}_2 \bar{Y}_2}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2}$$

$$\bar{Z}_M = \frac{1}{\left(\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3}\right)}$$

se invece scegliessimo come equivalente il generatore di fig. 12b) avremmo

$$\dot{E}_M = \frac{+\dot{E}_1 \bar{Y}_1 - \dot{E}_2 \bar{Y}_2}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2}$$

$$\bar{Z}_M = \frac{1}{\left(\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3}\right)}$$

In conclusione quindi

$$\dot{E}_M = \frac{\sum_{i=1}^n \pm \dot{E}_i \bar{Y}_i}{\sum_{i=1}^n \bar{Y}_i} \quad \bar{Z}_M = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{Z}_i}}$$

Riprendiamo le equazioni scritte per il circuito di figura 9

$$\begin{aligned}\dot{V}_{AB} + \dot{E}_1 &= \bar{Z}_1 \dot{I}_1 \\ \dot{V}_{AB} + \dot{E}_2 &= \bar{Z}_2 \dot{I}_2 \\ \dot{V}_{AB} + \dot{E}_3 &= \bar{Z}_3 \dot{I}_3\end{aligned}$$

il nostro circuito è poi stato sostituito dal circuito equivalente di figura 10 per il quale abbiamo

$$\dot{V}_{AB} + \dot{E}_M = \bar{Z}_M \dot{I}_n$$

con

$$\dot{E}_M = \frac{\dot{E}_1 \bar{Y}_1 + \dot{E}_2 \bar{Y}_2 + \dot{E}_3 \bar{Y}_3}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3} \quad \bar{Z}_M = \frac{1}{\left(\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3}\right)}$$

scrivendo ora l'equazione alla maglia in verso orario abbiamo

$$\dot{E}_M = (\bar{Z}_M + \bar{Z}) \dot{I}_n$$

da cui ricaviamo la  $\dot{I}_n$  e, di conseguenza, otteniamo la  $\dot{V}_{AB}$

$$\dot{V}_{AB} = -\dot{E}_M + \bar{Z}_M \dot{I}_n$$

nota la tensione, facilmente abbiamo

$$\begin{aligned}\dot{I}_1 &= \frac{\dot{V}_{AB}}{\bar{Z}_1} + \frac{\dot{E}_1}{\bar{Z}_1} \\ \dot{I}_2 &= \frac{\dot{V}_{AB}}{\bar{Z}_2} + \frac{\dot{E}_2}{\bar{Z}_2} \\ \dot{I}_3 &= \frac{\dot{V}_{AB}}{\bar{Z}_3} + \frac{\dot{E}_3}{\bar{Z}_3}\end{aligned}$$

ed infine

$$\dot{I}_n = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3$$

Riprendiamo la figura 8

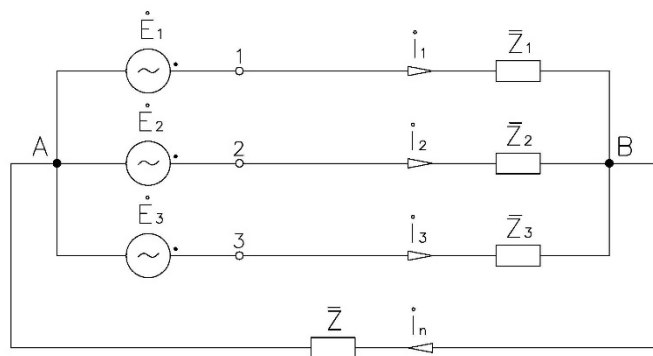


Fig. 8 – Collegamento parallelo generatori reali di tensione

a questo circuito abbiamo sostituito l'equivalente di fig. 9

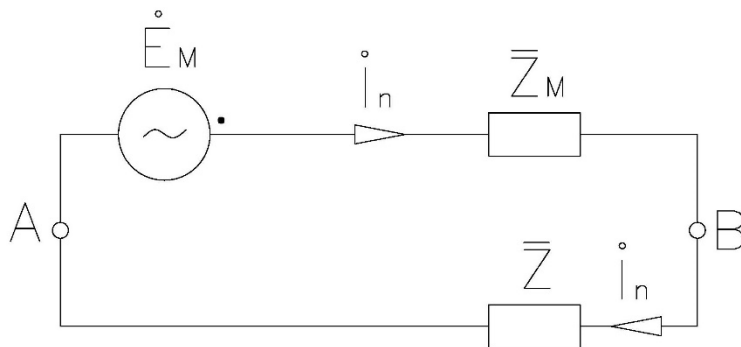


Fig. 9 – Generatore equivalente

ottenendo così un'unica maglia; ci chiediamo se sia possibile sostituire al circuito di fig. 8 un equivalente costituito da un solo bipolo aperto. Per fare ciò ipotizziamo di inserire nel ramo "n" un generatore di f.e.m. nulla, come riportato in figura 13

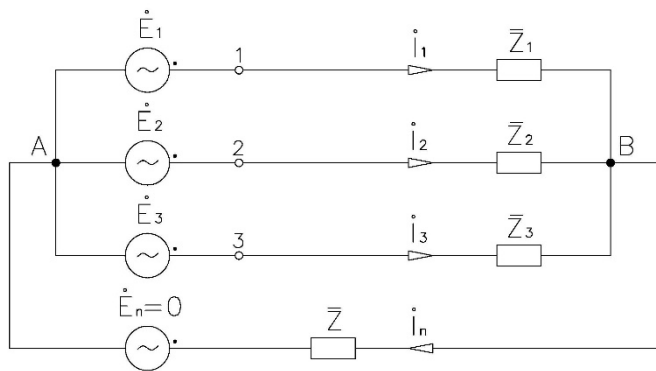


Fig. 13

Chiaramente l'inserimento della f.e.m. nulla non comporta alcuna variazione del regime elettrico ed applichiamo quindi Millman tra i nodi A e B, abbiamo

$$\dot{E}_M = \frac{\dot{E}_1 \bar{Y}_1 + \dot{E}_2 \bar{Y}_2 + \dot{E}_3 \bar{Y}_3 + \dot{E}_n \bar{Y}_n}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3 + \bar{Y}_n} = \frac{\dot{E}_1 \bar{Y}_1 + \dot{E}_2 \bar{Y}_2 + \dot{E}_3 \bar{Y}_3 + 0 \bar{Y}_n}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3 + \bar{Y}_n} = \frac{\dot{E}_1 \bar{Y}_1 + \dot{E}_2 \bar{Y}_2 + \dot{E}_3 \bar{Y}_3}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3 + \bar{Y}_n}$$

la  $\bar{Z}_M$  non ci interessa perché, essendo un bipolo aperto, non circola corrente e quindi che l'impedenza ci sia o meno non ha alcuna importanza.

Il bipolo equivalente è quindi



Fig. 14 - Bipolo equivalente

da questo bipolo otteniamo

$$\begin{aligned} \dot{V}_{AB} + \dot{E}_M &= 0 \\ \dot{V}_{AB} &= -\dot{E}_M \end{aligned}$$

una volta nota la  $\dot{V}_{AB}$

$$\begin{aligned} \dot{i}_1 &= \frac{\dot{V}_{AB}}{\bar{Z}_1} + \frac{\dot{E}_1}{\bar{Z}_1} \\ \dot{i}_2 &= \frac{\dot{V}_{AB}}{\bar{Z}_2} + \frac{\dot{E}_2}{\bar{Z}_2} \\ \dot{i}_3 &= \frac{\dot{V}_{AB}}{\bar{Z}_3} + \frac{\dot{E}_3}{\bar{Z}_3} \end{aligned}$$

ed infine

$$\dot{i}_n = \dot{i}_1 + \dot{i}_2 + \dot{i}_3$$

il vantaggio consiste nel non dover scrivere più l'equazione alla maglia per ricavare  $\dot{i}_n$  e dopo la  $\dot{V}_{AB}$  per determinare infine le correnti nei rami del sistema.

**Nota**

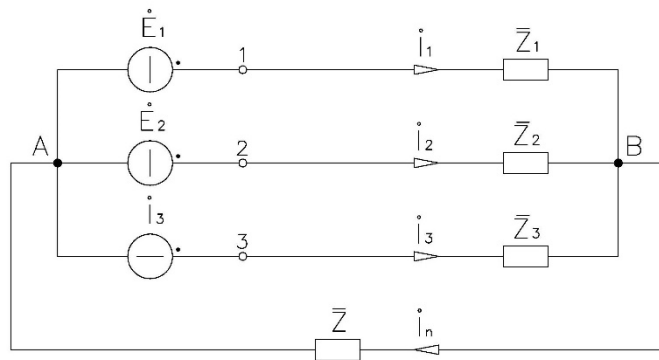
Il Teorema di Millman è applicabile a tutte le reti elettriche, in corrente continua o alternata, purché siano reti binodali, vale a dire reti costituite da n rami tutti derivati da due nodi. La sua formulazione deriva da un caso particolare del metodo di risoluzione di reti elettriche conosciuto come potenziale ai nodi.

Il teorema afferma che:

la tensione ai capi del bipolo della rete è data dal rapporto tra la somma algebrica delle correnti di corto circuito dei singoli rami e la somma delle ammettenze sempre di ogni ramo.

$$\dot{E}_M = \frac{\dot{E}_1 \bar{Y}_1 + \dot{E}_2 \bar{Y}_2 + \dot{E}_3 \bar{Y}_3 + \dots + \dot{E}_n \bar{Y}_n}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3 + \dots + \bar{Y}_n}$$

In quest'ultima espressione si capisce perché nell'enunciato del teorema si afferma *somma algebrica delle correnti di corto circuito dei singoli rami*: infatti l'espressione al numeratore della formula qui sopra definisce le correnti nei vari rami se ciascuno di essi fosse cortocircuitato (vale a dire se fossero collegati in cortocircuito i nodi A e B).



Siano  $\dot{E}_k$  le f.e.m. degli  $n$  generatori di tensione e  $\dot{I}_k$  le correnti degli  $n$  generatori di corrente.

Siano  $\bar{Z}_i$  le impedenze equivalenti degli  $n$  rami senza generatori.

Siano  $\bar{Z}_k$  le impedenze equivalenti degli  $n$  rami con i generatori di tensione.

Siano  $\bar{Z}_m$  le impedenze equivalenti degli  $n$  rami con i generatori di corrente.

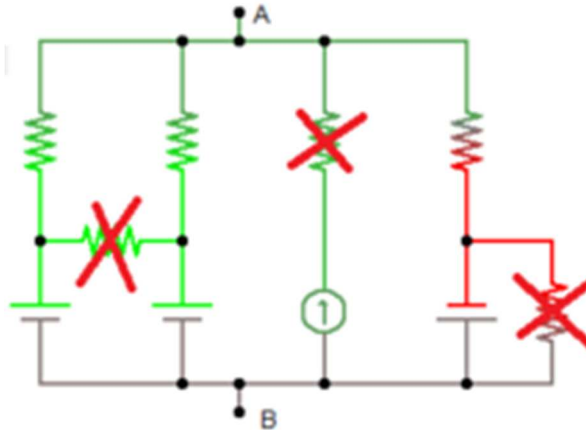
Il teorema di Millman afferma che la tensione ai terminali del circuito è data da:

$$\dot{E}_M = \frac{\sum_{k=1}^n \pm \dot{E}_k \bar{Y}_k + \sum_{k=1}^n \pm \dot{I}_k}{\sum_{k=1}^n \bar{Y}_k + \sum_{i=1}^n \bar{Y}_i} \quad \bar{Z}_M = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \bar{Y}_k + \sum_{i=1}^n \bar{Y}_i}$$

**Componenti che non influenzano il teorema di Millman**

Il teorema di Millman si può comunque applicare anche quando ci sono componenti in più che però non influenzano la corrente entrante nei nodi tra i quali si sta applicando il teorema. I casi sono, vedasi figura seguente

- impedenza in parallelo ad un generatore di tensione appartenente ad un lato Thevenin trasformabile;
- impedenza che unisce due rami contenenti entrambi un generatore di tensione;
- impedenza in serie ad un generatore di corrente.



**Dimostrazione**

Indicando con  $I_{ci}$  la generica corrente che scorre nel generico ramo della figura di pagina 15, in base alla legge di Kirchhoff delle correnti la somma algebrica delle correnti entranti al nodo A è nulla.

$$I_{c1} + I_{c2} + \dots + I_{cn} = 0$$

Supponiamo inizialmente che tutti i rami contengano un resistore in serie ad un generatore di tensione, in questo caso le correnti possono essere scritte come:

$$I_{c1} = \frac{V_{AB} - E_i}{Z_i}$$

Sostituendo nella formula della legge di Kirchhoff si ottiene

$$\frac{V_{AB} - E_1}{Z_1} + \frac{V_{AB} - E_2}{Z_2} + \dots + \frac{V_{AB} - E_n}{Z_n} = \frac{V_{AB}}{Z_1} - \frac{E_1}{Z_1} + \frac{V_{AB}}{Z_2} - \frac{E_2}{Z_2} + \dots + \frac{V_{AB}}{Z_n} - \frac{E_n}{Z_n} = 0$$

Mettendo  $V_{AB}$  in evidenza e portando i termini contenenti i generatori di tensione al secondo membro si ottiene:

$$V_{AB} \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right) = \left( \frac{E_1}{Z_1} + \frac{E_2}{Z_2} + \dots + \frac{E_n}{Z_n} \right)$$

e quindi il risultato noto.

Se in uno o più rami è presente un generatore di corrente è evidente che la corrente che arriva al nodo corrisponde alla corrente del generatore, quindi la formula diventa:

$$V_{AB} = \frac{\frac{E_1}{Z_1} + \frac{E_2}{Z_2} + \dots + \frac{E_n}{Z_n} + I_{cn+1} + \dots + I_{cn+m}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n}}$$

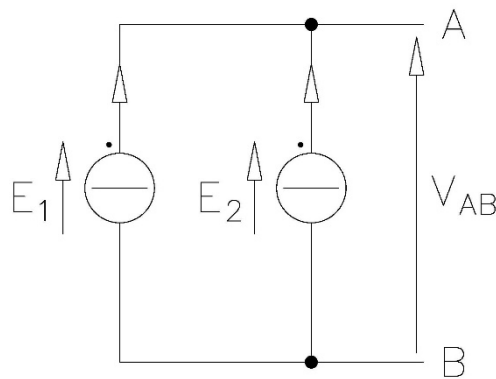


La tensione  $V_{AB}$  dipende, quindi, esclusivamente dalle correnti sul nodo A (o B e le correnti sui due nodi sono le medesime a meno del segno), quindi tutti i componenti che non influenzano queste correnti sono ininfluenti, questi includono:

- impedenza in parallelo ad un generatore di tensione appartenente ad un lato Thevenin trasformabile;
- impedenza che unisce due rami contenenti entrambi un generatore di tensione;
- impedenza in serie ad un generatore di corrente.

L'ultimo caso da tenere in considerazione è la presenza di un'impedenza in parallelo ad un generatore di corrente. In questo caso la corrente del generatore si suddivide in due parti: una parte attraversa direttamente l'impedenza in parallelo, la restante arriva al nodo. La risoluzione di questo circuito può essere effettuata convertendo il gruppo generatore di corrente-impedenza in parallelo nell'equivalente generatore di tensione di Thevenin, oppure calcolando la corrente che arriva al nodo considerando il partitore di corrente

### **Generatori ideali**



*Fig. 15 – Collegamento parallelo generatori ideali di tensione*

Il collegamento parallelo è caratterizzato dall'aver i bipoli la medesima tensione ai loro morsetti; quindi se le f.e.m. dei due generatori ideali sono uguali, allora avremo un'identità; altrimenti l'uguaglianza è impossibile.

Non si possono, infatti, collegare in parallelo generatori di tensioni diverse perché ciò vorrebbe dire che il lavoro (tensione) che dovrà compiere il campo elettrico per spostare le cariche da A a B sarà diverso a seconda che si vada attraverso  $E_1$  o attraverso  $E_2$  e questo è assurdo essendo il campo elettrico, un campo conservativo.

### 3.2 Collegamento serie

#### Generatori reali

Sia dato ora il sistema di figura 16:

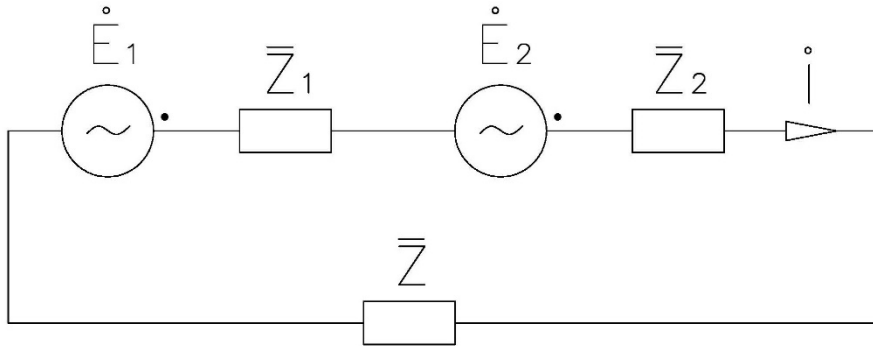


Fig. 16 – Collegamento serie generatori reali di tensione

Fissato il senso di percorrenza in verso orario, scriviamo l'equazione di Kirchhoff alla maglia

$$\dot{E}_1 + \dot{E}_2 = \bar{Z}_1 i + \bar{Z}_2 i + \bar{Z} i = (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) i + \bar{Z} i$$

poniamo ora

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 + \dot{E}_2 &= \dot{E}_s \\ \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 &= \bar{Z}_s \end{aligned}$$

l'equazione diviene

$$\dot{E}_s = \bar{Z}_s i + \bar{Z} i$$

e la tensione  $\dot{V}_{ca}$  ai morsetti del carico  $\bar{Z}$  è data da

$$\dot{V}_{ca} = \bar{Z} i$$

L'equazione  $\dot{E}_s = \bar{Z}_s i + \bar{Z} i$  rappresenta anche l'equazione alla maglia del circuito

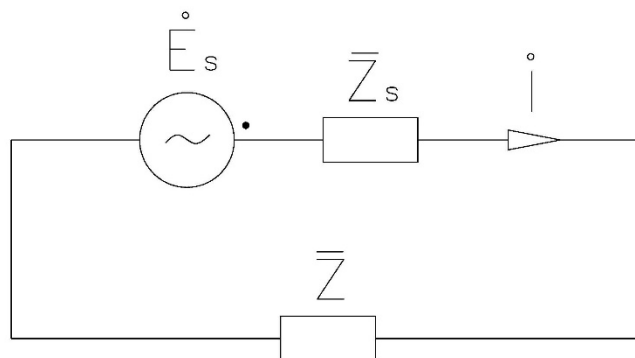


Fig. 17 – Generatore di tensione reale equivalente

e la tensione  $\dot{V}_{ca}$  ai morsetti del carico  $\bar{Z}$  è ancora data da

$$\dot{V}_{ca} = \bar{Z}i$$

quindi poiché sia la tensione sia la corrente che interessano il carico  $\bar{Z}$  rimangono immutate, possiamo affermare che il circuito di fig. 8 è equivalente al circuito di figura 7, purché

$$\dot{E}_s = \dot{E}_1 + \dot{E}_2 \quad e \quad \bar{Z}_s = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$$

In definitiva diciamo che “n” generatori di tensione reali indipendenti collegati in serie equivalgono ad un generatore reale indipendente la cui f.e.m. e la cui impedenza serie è  $\bar{Z}_s$  sono

$$\dot{E}_s = \sum_{i=1}^n \dot{E}_i \quad \bar{Z}_s = \sum_{i=1}^n \bar{Z}_i$$

Anche qui, come nel caso del collegamento parallelo, qualora le f.e.m. fossero discordi dobbiamo prima scegliere il verso positivo della f.e.m. equivalente e poi attribuire il segno + o – alle f.e.m. rispettivamente di segno concorde o di segno discorde da quello da noi scelto come positivo. In conclusione quindi

$$\dot{E}_s = \sum_{i=1}^n \pm \dot{E}_i \quad \bar{Z}_s = \sum_{i=1}^n \bar{Z}_i$$

### Generatori ideali

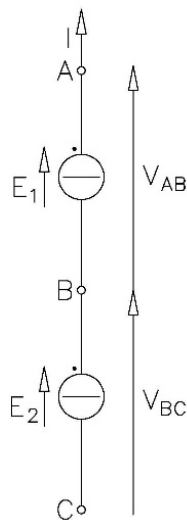


Fig. 18 – Collegamento serie generatori ideali di tensione

Due o più generatori ideali di tensione in serie equivalgono ad un generatore ideale di tensione equivalente che genera una forza elettromotrice uguale alla somma algebrica delle singole forze elettromotrici

Anche qui, come nel caso precedente, qualora le f.e.m. fossero discordi dobbiamo prima scegliere il verso positivo della f.e.m. equivalente e poi attribuire il segno + o – alle f.e.m. rispettivamente di segno concorde o di segno discorde da quello da noi scelto come positivo. In conclusione quindi:

$$\dot{E}_s = \sum_{i=1}^n \pm \dot{E}_i$$

#### 4. Parallelo e serie di generatori di corrente

##### 4.1 Collegamento parallelo

###### Generatori reali

Sia dato il sistema di figura 19:

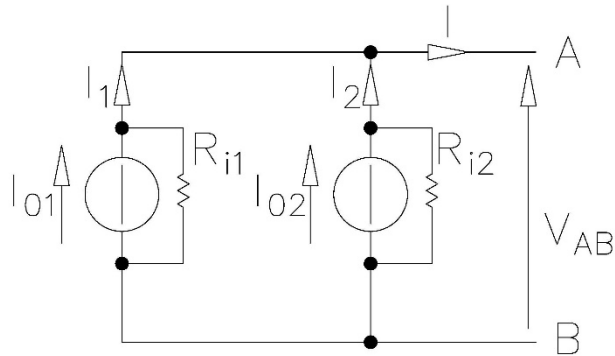


Fig. 19 – Collegamento parallelo generatori reali di corrente

Utilizzando il teorema di Norton si ricavano i parametri del generatore di corrente equivalente (figura 20)

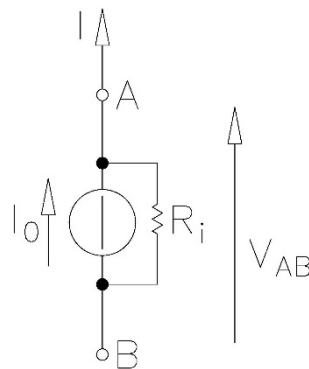


Fig. 20 – Generatore di corrente reale equivalente

Infatti, cortocircuitando i morsetti A e B, si ricava che la  $I_{cc}$  è uguale a:

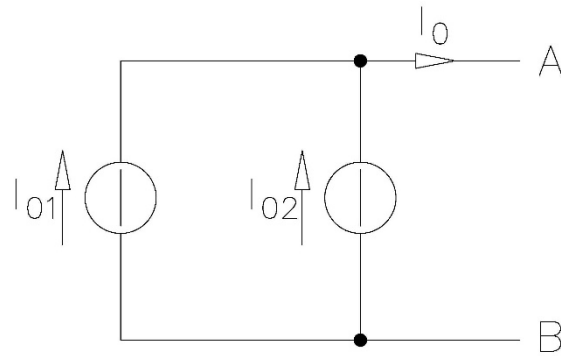
$$I_{cc} = I_{01} + I_{02}$$

ed  $R_i$ , che si calcola aprendo i generatori ideali di corrente, ed è la resistenza equivalente vista dai morsetti A e B, è data dal parallelo di  $R_{i1}$  con  $R_{i2}$  per cui:

$$R_i = \frac{R_{i1}R_{i2}}{R_{i1} + R_{i2}}$$

### **Generatori ideali**

Due o più generatori ideali di corrente in parallelo:



*Fig. 21 – Collegamento parallelo generatori ideali di corrente*

equivalgono ad un generatore ideale equivalente di corrente che genera una corrente  $I_0$  pari alla somma delle singole correnti generate:

$$I_0 = I_{01} + I_{02}$$

## 4.2 Collegamento serie

### Generatori reali

Sia dato il sistema di figura 22:

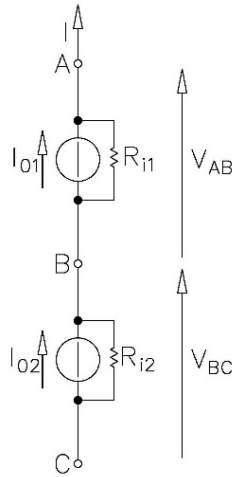


Fig. 22 – Collegamento serie generatori reali di corrente

La ricerca del generatore di corrente equivalente utilizza il teorema di Thévenin per ricavare i parametri del generatore reale di tensione equivalente (fig. 23).

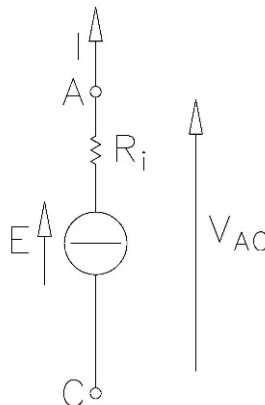


Fig. 23 – Equivalente di tensione a collegamento serie generatori reali di corrente

La resistenza interna del generatore di tensione equivalente  $R_i$  si trova aprendo i generatori ideali di corrente e "guardando" dai morsetti A e C la resistenza risultante; questa è la somma delle due resistenze  $R_{i1}$  e  $R_{i2}$  perché viste tra A e C le due resistenze sono in serie:

$$R_i = R_{i1} + R_{i2}$$

La forza elettromotrice E del generatore equivalente (fig. 23) è la tensione a vuoto  $V_{AC0}$ .

Poiché a vuoto  $I = 0$ , si ha che  $I_{01}$  si chiude interamente su  $R_{i1}$  ed  $I_{02}$  si chiude interamente su  $R_{i2}$  abbiamo (fig. 22):

$$\begin{aligned} V_{AB} &= R_{i1} I_{01} \\ V_{BC} &= R_{i2} I_{02} \end{aligned}$$

di conseguenza:

$$V_{AC0} = V_{AB} + V_{BC} = R_{i1} I_{01} + R_{i2} I_{02}$$

Per ottenere ora il generatore di corrente equivalente alla serie di generatori reali di corrente, applichiamo il principio di Norton al generatore di figura 23. Utilizzando quindi il principio di Norton ricaviamo il generatore reale di corrente equivalente che avrà una resistenza interna pari a  $R_i$  che è la somma delle singole  $R_i$  ed una corrente generata  $I_0$  pari alla corrente di cortocircuito:

$$I_0 = \frac{E}{R} = \frac{R_{i1}I_{01} + R_{i2}I_{02}}{(R_{i1} + R_{i2})}$$

se si usano le conduttanze si ottiene un'espressione che è duale rispetto alla formula del teorema di Millman per i generatori di tensione reali in parallelo:

$$I_0 = \frac{\frac{I_{01}}{G_{i1}} + \frac{I_{02}}{G_{i2}}}{\frac{1}{G_{i1}} + \frac{1}{G_{i2}}}$$

dove  $G = 1/R$ .

### Generatori ideali

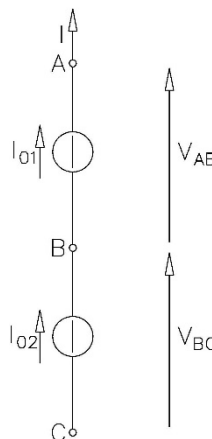


Fig. 24 – Collegamento serie generatori ideali di corrente

Questo collegamento non può essere preso in considerazione. Il fatto che il collegamento in serie imponga che la corrente sia identica per ciascun elemento permette un'unica possibilità:

$$I_{01} = I_{02} = I_0$$

Ogni altro caso in cui  $I_{01}$  sia diverso da  $I_{02}$  è da ritenere assurdo in quanto l'eguaglianza precedente deve sussistere comunque perché i generatori sono collegati in serie.

## **Sommario**

Generatori indipendenti di tensione e di corrente .....	2
1. La tensione ideale e generatori di corrente .....	2
1.1 Generatore ideale di tensione.....	2
1.2 Generatore ideale di corrente .....	3
2. Generatori reali e resistenza serie e/o parallelo .....	4
2.1 Generatori reali di tensione .....	4
2.2 Generatori reali di corrente .....	5
3. Parallelo e serie di generatori di tensione .....	6
3.1 Collegamento parallelo .....	6
Generatori reali .....	6
Componenti che non influenzano il teorema di Millman.....	16
Generatori ideali .....	17
3.2 Collegamento serie .....	18
Generatori reali .....	18
Generatori ideali .....	19
4. Parallelo e serie di generatori di corrente.....	20
4.1 Collegamento parallelo .....	20
Generatori reali .....	20
Generatori ideali .....	21
4.2 Collegamento serie .....	22
Generatori reali .....	22
Generatori ideali .....	23
Sommario.....	24