UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MESSINA
Dipartimento di Ingegneria
Contrada Di Dio I, 98166 – Villaggio S. Agata Messina

Appunti Corso di Elettrotecnica

Il calcolo delle grandezze sinusoidali
Parte Prima

Anno Accademico 2023-2024

prof. ing. Bruno Azzerboni

Fonti:
Lezioni di Elettrotecnica Generale *- Giulio Battistini*
Colombo Cursi Pisa
Elettrotecnica *- Giulio Battistini – Franco Nencioni*
Le Monnier 1984

Individuazione di una grandezza variabile nel tempo

Nelle applicazioni pratiche dei fenomeni elettrici, oltre le correnti continue vengono largamente utilizzate correnti elettriche, la cui intensità varia permanentemente nel tempo. Tali correnti, in molti casi, invertono anche periodicamente il loro senso e vengono perciò, nel linguaggio comune, genericamente indicate col nome di *correnti alternate*.

Il moto variabile od alternato viene impresso alle cariche elettriche da f. e. m. o tensioni anch'esse variabili nel tempo, le quali, quando mutano periodicamente di senso, vengono genericamente denominate *tensioni alternate*.

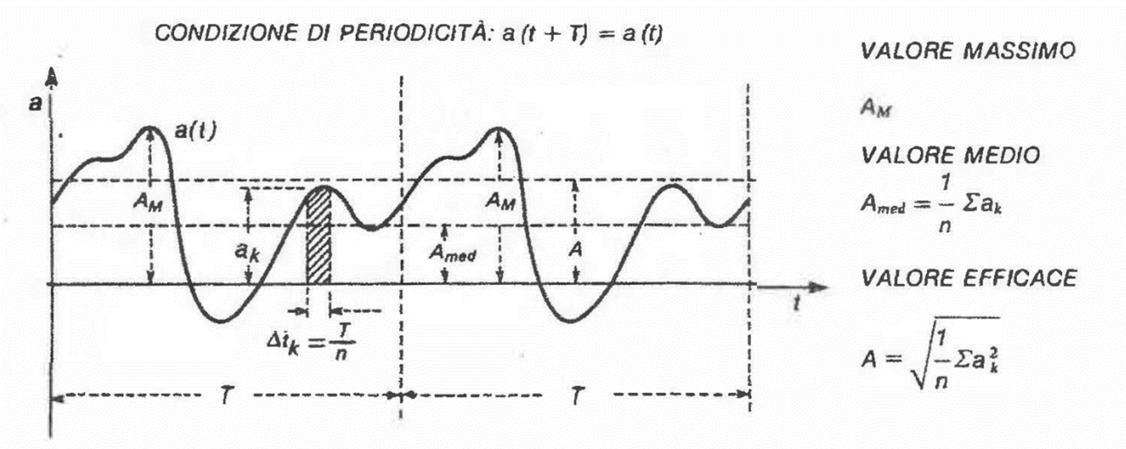
In un circuito a corrente continua a regime, la corrente e la tensione risultano compiutamente individuate, quando se ne indichi il senso e l'intensità. Nei circuiti a corrente alternata, invece, il problema della individuazione delle grandezze è notevolmente più complesso perché comporta la indicazione, istante per istante, della intensità e del senso della corrente o della tensione, le quali risultano pertanto compiutamente determinate, solo quando se ne conosce *la legge di variazione nel tempo*.

È facile intuire poi come aumenti ulteriormente la complessità dei problemi, allorché si debbono effettuare i calcoli relativi a fenomeni nei quali diverse grandezze alternate intervengono contemporaneamente, combinandosi e influenzandosi a vicenda.

È necessario perciò, prima di iniziare lo studio delle correnti alternate sotto l'aspetto fisico, richiamare alcune fondamentali considerazioni di carattere matematico e, in base ad esse, istituire opportuni procedimenti di calcolo, idonei ad una rapida ed agevole soluzione dei problemi connessi con lo studio dei circuiti a corrente alternata

Grandezze periodiche

Una grandezza variabile nel tempo si dice *periodica*, come è noto, quando *i valori da essa assunti in un determinato intervallo di tempo T, detto periodo*, *vengono di nuovo identicamente assunti con la stessa, nei periodi successivi.*



1

$$Valora\ Medio \quad A_m = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \qquad Valore\ Efficace \quad A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt}$$

Fig. 1 – Grandezza periodica

Se dunque $f(t)$ è la funzione che definisce la grandezza variabile (fig. l), questa si dice periodica quando soddisfa identicamente alla condizione:

$$f(t+T) = f(t)$$

dove T è il periodo.

L'inverso del periodo, cioè il numero dei periodi contenuti entro l'unità di tempo, è la *frequenza* (f) della grandezza periodica:

$$f = \frac{1}{T}$$

La frequenza è quindi una grandezza fisica che ha le dimensioni inverse di un tempo:

$$[f] = [T^{-1}]$$

e la sua unità di misura è *la frequenza di quella grandezza periodica che compie un periodo al secondo*: essa si chiama Hertz (Hz).

Una grandezza, anche non periodica, si dice *unidirezionale* quando i suoi valori, in ogni istante, hanno sempre lo stesso segno (ed eventualmente si annullano in qualche punto); il diagramma di una grandezza unidirezionale rimane ovviamente tutto da una parte dell'asse delle ascisse senza mai attraversarlo (fig. 2a).
Diciamo *oscillante* una grandezza i cui valori oscillano (con ampiezza costante o variabile) attorno ad una linea (retta o curva), in modo che gli scostamenti rispetto ad essa abbiano un valore medio nullo (fig. 2b).
Nella pratica, va assumendo sempre maggiore importanza un particolare tipo di grandezze periodiche unidirezionali che hanno un andamento, nel tempo, del tutto discontinuo. Esse si mantengono nulle dall'inizio del periodo fino ad un determinato istante di esso; indi, per un brevissimo intervallo, assumono valori anche elevati; successivamente, tornano a zero e vi si mantengono per tutto il resto del periodo (fig. 2c). Tali grandezze si dicono *impulsive* ed il valore massimo assunto durante il guizzo periodico si chiama *valore di cresta*.

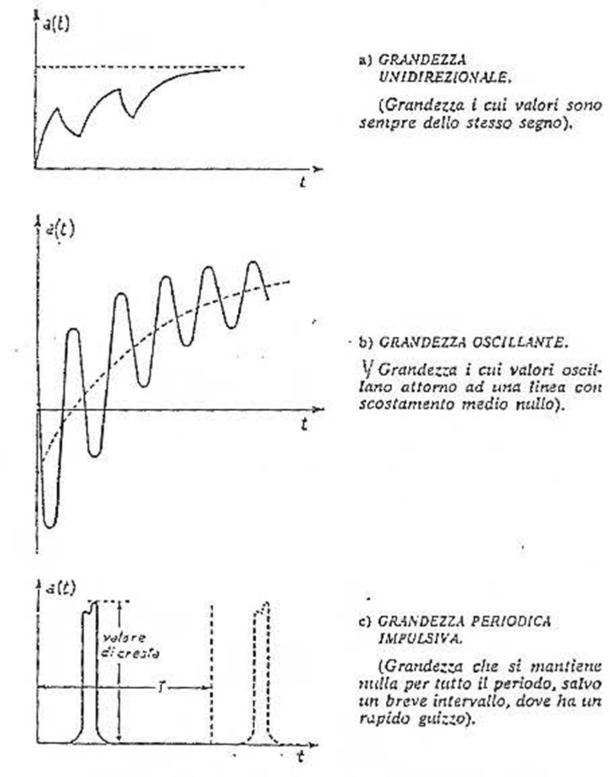


Fig. 2 – Grandezze unidirezionali, oscillanti e impulsive

È noto dall'analisi matematica che una funzione periodica $f(t)$ è decomponibile, a meno di un addendo costante, in una somma di sinusoidi di frequenza crescente secondo una progressione aritmetica (teorema di Fourier):

$$f(t) = \frac{A_{M0}}{2} + A_{M1}\cos\omega t + A_{M2}\cos 2\omega t + \cdots\cdots + A_{Mn}\cos n\omega t +$$

$$\begin{aligned} f(t) = \frac{A_{M0}}{2} + A_{M1}\cos\omega t + A_{M2}\cos 2\omega t + \cdots\cdots + A_{Mn}\cos n\omega t + \cdots\cdots \\ + B_{M1}\sin\omega t + B_{M2}\sin 2\omega t + \cdots\cdots + B_{Mn}\sin n\omega t + \cdots\cdots \end{aligned}$$

Dove $\omega = {}^{2\pi}/_{T}$ (essendo T il periodo della grandezza periodica) ed i valori dei coefficienti generici A_{Mn} e B_{Mn} (essendo n un numero intero) sono dati dalle espressioni:

$$\begin{cases} A_{Mn} = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cos n\omega t \ \ dt \\ B_{Mn} = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\sin n\omega t \, dt \end{cases}$$

Con $n = 0, 1, 2, 3, \dots \dots$)

Tali· espressioni consentono di calcolare i coefficienti A_{Mn} e B_{Mn} quando è nota in forma algebrica la funzione $f(t)$; in particolare risulta:

$$\frac{A_{M0}}{2} = \frac{1}{2} * \frac{2}{T} \int_0^T f(t)dt = C_0$$

cioè C_0 è il valor medio della funzione periodica.
Spesso, nella pratica delle applicazioni, $f(t)$ è rappresentata da una curva non traducibile in legge matematica ed allora il calcolo dei coefficienti A_{Mn} e B_{Mn}, non può essere eseguito mediante un procedimento analitico diretto.
Ordinariamente si ritiene più utile effettuare la decomposizione della funzione $f(t)$ in una forma più adatta alle applicazioni, che si deduce dalla precedente riunendo in un unico termine gli addendi contenenti il seno e il coseno degli argomenti di ugual frequenza ed esprimendoli tutti in funzione del solo seno[1]:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{Mn} \sin(n\omega t) + \alpha_n$$

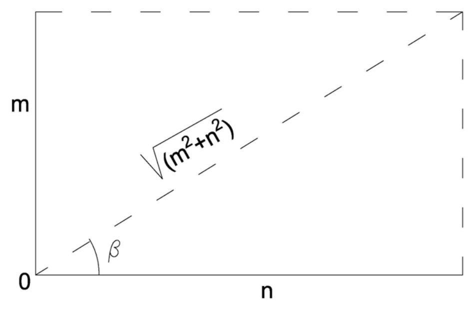
dove C_0, ha il valore indicato in precedenza e per gli altri termini si ha:

$$\begin{cases} C_{Mn} = \sqrt{A_{Mn}^2 + B_{Mn}^2} \\ \alpha_n = \tan^{-1} \dfrac{A_{Mn}}{B_{Mn}} \end{cases}$$

I termini che costituiscono lo sviluppo di questa. serie sono tutti (ad eccezione del termine costante C_0) sinusoidi di frequenza nf e quindi di periodo T/n; essi si chiamano *componenti armoniche*.
Il termine costante C_0, (detto armonica. di ordine zero, perché corrisponde a $n = 0$), si chiama comunemente *componente continua*.
Se la componente continua è nulla ($C_0 = 0$), il diagramma della funzione oscilla da una parte e dall'altra dell'asse dei tempi compiendo escursioni la cui media è zero.

Se invece la componente continua è diversa da zero ($C_0 \neq 0$), il diagramma di $f(t)$ risulta interamente traslato, rispetto al caso precedente, nella direzione dell'asse delle ordinate di una quantità C_0 e dà luogo quindi ad una curva oscillante attorno al valore C_0.

[1] Infatti, da semplici relazioni trigonometriche (fig. 3), si deduce che:



$$\begin{cases} m = \sqrt{m^2 + n^2} \sin \beta \\ n = \sqrt{m^2 + n^2} \cos \beta \\ \beta = \tan^{-1} \dfrac{m}{n} \end{cases}$$

Fig. 3 – Relazioni trigonometriche per il calcolo delle componenti armoniche

$m \cos \alpha + n \sin \alpha =$
$= \sqrt{m^2 + n^2} \left(\frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \cos \alpha + \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \sin \alpha \right) =$
$= \sqrt{m^2 + n^2} (\sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha) = \sqrt{m^2 + n^2} \sin(\alpha + \beta) =$
$= \sqrt{m^2 + n^2} \sin \left(\alpha + \tan^{-1} \frac{m}{n} \right)$

Il termine:

$$C_{M1}\sin(\omega t+\alpha_1)$$

Corrispondente a $n=1$, si chiama *prima armonica o componente fondamentale*; la sua frequenza f è la *frequenza fondamentale* della grandezza periodica il cui periodo coincide, pertanto, con il periodo della prima armonica[2].
I termini successivi:

$$C_{M2}\sin(2\omega t+\alpha_2);\ \ C_{M3}\sin(3\omega t+\alpha_3);\cdots\cdots$$

Corrispondenti a $n=2,3,\cdots$, di frequenza rispettivamente $2f,3f,\cdots$, multipla secondo il numero n della frequenza fondamentale f, si chiamano rispettivamente *seconda armonica*, *terza armonica*, e così via.
La composizione della componente continua, della componente fondamentale e di tutte le armoniche superiori ricostituisce evidentemente, nel suo andamento comunque complesso, la grandezza periodica $f(t)$.

Oltre al periodo e alla frequenza, altri parametri caratteristici sono usati nella pratica per la individuazione delle grandezze periodiche; di essi citeremo i principali.
Si dice *valore massimo* (A_M) *di una grandezza periodica* $a=f(t)$*, il massimo valore assoluto che essa assume durante l'intero periodo*.
Si dice invece *valore medio nell'intero periodo* (A_{med}) *della grandezza la media dei valori da essa assunti durante l'intero periodo:*

$$A_{med}=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

In pratica il valore medio nell'intero periodo non è altro che l'altezza del rettangolo, con base il periodo, equivalente all'area della curva sottesa nel periodo.

Come abbiamo già rilevato, A_{med}, è il valore della componente continua nello sviluppo in serie di Fourier della funzione $f(t)$.

Infine, un parametro di larghissimo uso nel calcolo delle grandezze periodiche, è il *valore efficace* (A) della grandezza $a=f(t)$,la cui importanza potrà essere meglio valutata in seguito, quando ne verrà illustrato il significato fisico*; esso è la radice quadrata della media dei quadrati dei valori assunti dalla grandezza durante il periodo*.

$$A=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt}$$

Nella analisi matematica si dimostra che il valore efficace A di una grandezza periodica è uguale alla radice quadrata della somma dei quadrati della componente continua ($C_0=A_{med}$) e dei valori efficaci ($C_1,C_2,C_3,\cdots$) delle singole componenti armoniche dello sviluppo in serie di Fourier di $f(t)$.

$$A=\sqrt{C_0^2+C_1^2+C_2^2+C_3^2+\cdots}$$

[2] Ciò vale anche nel caso particolare in cui l'ampiezza della prima armonica è nulla e quindi la componente fondamentale non compare nello sviluppo di Fourier.

Grandezze alternative

Le grandezze alternative costituiscono una particolare categoria delle grandezze periodiche.

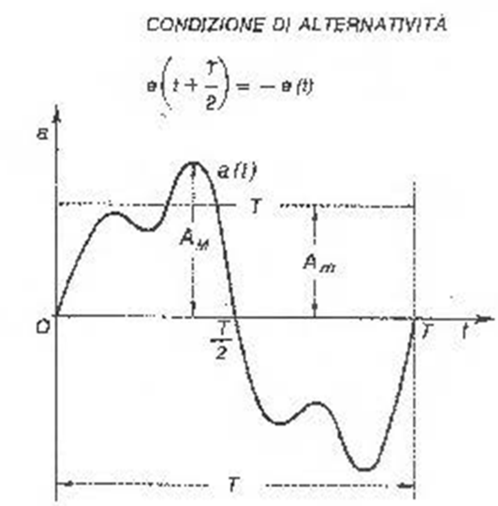
Una grandezza periodica si dice *alternativa* quando *la successione dei valori da essa assunti nella seconda metà del periodo riproduce identicamente, ma con segno opposto, la successione dei valori assunti nella prima metà.*

Vale a dire, una grandezza periodica $f(t)$, di periodo T (fig. 4), si dice alternativa quando soddisfa identicamente alla condizione:

$$f\left(t \pm \frac{T}{2}\right) = -f(t)$$

Dalla definizione stessa si deduce immediatamente che *il valor medio, relativo ad un intero periodo, di una grandezza alternativa è sempre nullo*[3]:

$$A_{med} = 0$$



Fattori di comparazione di una grandezza alternativa

Valore massimo

$$A_M$$

Valore medio in un semiperiodo

$$A_m = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)dt$$

Valore efficace

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T} f^2(t)dt}$$

Condizione di alternatività

$$f\left(t \pm \frac{T}{2}\right) = -f(t)$$

Fattore di forma

$$k_f = {}^{A}/_{A_m}$$

Fattore di ampiezza

$$k_a = {}^{A_M}/_{A}$$

Fig. 4 – Grandezza alternativa

Per le grandezze alternative non offre dunque alcuna utilità, ai fini della loro individuazione, la considerazione del valor medio A_{med} calcolato in un intero periodo, che è sempre nullo.

È invece molto utile per il calcolo di esse, la considerazione del *valor medio in un semiperiodo* (A_m) che si definisce come la *media dei valori assunti dalla grandezza nel semiperiodo positivo*; quindi, assumendo come origine dei tempi l'istante iniziale del semiperiodo positivo della grandezza, A_m è dato da:

$$A_m = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)dt$$

[3] Alcuni autori, assumendo una definizione più generale di quella da noi adottata, chiamano grandezze alternative tutte quelle che semplicemente soddisfano alla condizione $A_{med} = 0$.
Si è ritenuta opportuna l'adozione della definizione più restrittiva, sopra enunciata, perché consente di utilizzare talune proprietà caratteristiche che semplificano notevolmente i calcoli; e, d'altra parte, le tensioni generate dai comuni alternatoci corrispondono alla definizione da noi adottata.

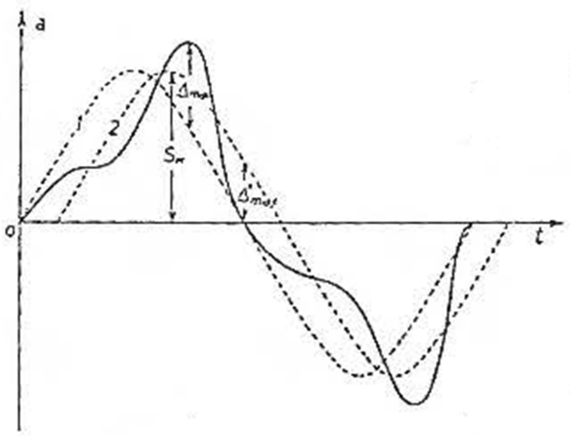
Pertanto, tutte le volte che citeremo il valore medio di una grandezza alternativa, è ovvio che intenderemo riferirci al suo valore medio relativo ad un semiperiodo.
La grande multiformità che presentano le grandezze alternative, ne rende generalmente impossibile un rigoroso confronto, anche nel caso che abbiano uguale periodo ed uguale valore massimo. Tuttavia, per taluni fini pratici può essere utile la considerazione di alcuni parametri, detti *fattori di comparazione* dei quali enumeriamo qui di seguito i principali.
Si definisce *fattore di forma* (k_f) di una grandezza alternativa, *il rapporto fra il suo valore efficace ed il suo valore medio*:

$$k_f = \frac{A}{A_m}$$

Si chiama invece *fattore di ampiezza* (k_a), *il rapporto fra il valore massimo ed il valore efficace:*

$$k_a = \frac{A_M}{A}$$

Dalla loro stessa definizione si deduce facilmente che tanto il fattore di forma che il fattore di ampiezza sono numeri sempre maggiori di uno[4]
Si dice *sinusoide equivalente* di una grandezza alternativa*, la sinusoide che ha lo stesso periodo e lo stesso valore efficace della grandezza considerata*.
La sinusoide equivalente di una grandezza alternativa è utile nella pratica perché può essere sostituita, in calcoli di prima approssimazione, alla grandezza data e perché consente di stabilire un criterio di valutazione della *deformazione* della grandezza stessa, rispetto alla legge sinusoidale.
A tale scopo è necessario attribuire alla sinusoide equivalente la posizione, lungo l'asse dei tempi (fig. 5), in corrispondenza della quale la massima differenza di ordinate fra essa e la curva della grandezza data, risulta la più piccola possibile.



Fattore di deformazione

$$k_d = \frac{\Delta^*_{max}}{S_M}$$

Fig. 5 – Sinusoide equivalente di una grandezza alternativa

Si definisce allora *fattore di deformazione* della grandezza alternativa (fig. 5), *il rapporto fra la massima differenza di ordinata* Δ^*_{max} *esistente tra la curva della grandezza alternativa e la sinusoide equivalente (quando questa è nella posizione che rende minima tale differenza), e l'ampiezza* S_M *della sinusoide equivalente stessa*:

$$k_d = \frac{\Delta^*_{max}}{S_M}$$

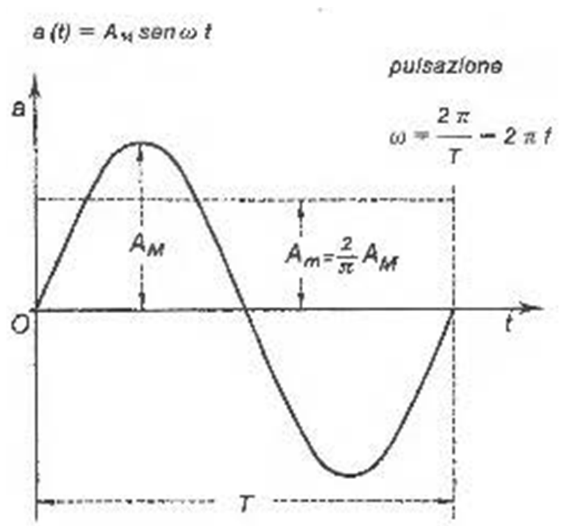
Nella tecnica delle applicazioni elettriche, una grandezza alternativa con un fattore di deformazione inferiore al 5 %, si può ritenere praticamente sinusoidale. La tensione generata dai normali alternatori ha un andamento assai vicino a quello sinusoidale ed il fattore di deformazione è contenuto di solito entro il 10 %.

---

4 Essi sono uguali ad uno nel caso limite, che illustreremo in seguito, in cui la curva rappresentativa della grandezza ha · andamento rettangolare.

Grandezze sinusoidali
Una grandezza alternativa. $a = f\ (t)$ si dice sinusoidale, quando varia nel tempo seguendo la legge del seno. Scegliendo come origine dei tempi l'istante iniziale del suo semiperiodo positivo, l'andamento della grandezza nel tempo (fig. 6) è rappresentato dalla relazione:

$$a = f(t) = A_M \sin \omega t$$



Valore massimo
$$A_M$$

Valore medio in un semiperiodo
$$A_m = \frac{2}{\pi} A_M = 0{,}637 A_M$$

Valore efficace
$$A = \frac{A_M}{\sqrt{2}} = 0{,}707 A_M$$

Fattore di forma
$$k_f = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11$$

Fattore di ampiezza
$$k_a = \sqrt{2}$$

Fig. 6 – Grandezza sinusoidale

dove, come è noto, a è il *valore istantaneo* della grandezza, A_M il suo *valore massimo o ampiezza* e ω la *pulsazione*. La pulsazione è legata al periodo T dalla relazione:

$$\omega T = 2\pi$$

e poiché la *frequenza* f è l'inverso del periodo T, si ha anche:

$$\omega = 2\pi f$$

Quindi l'espressione tipica di una grandezza sinusoidale si scrive comunemente anche sotto la forma:

$$a = A_M \sin 2\pi f t$$

Il *valore medio in un semiperiodo* di una grandezza sinusoidale è (ricordando che $T\omega = 2\pi$):

$$A_m = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} a dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} A_M \sin \omega t\, dt = \frac{2A_M}{T\omega}\left[-\cos \omega \frac{T}{2} + \cos 0\right] = \frac{2A_M}{2\pi}\left[-\cos\frac{2\pi}{2} + 1\right] = \frac{2A_M}{2\pi} 2 = \frac{2}{\pi} A_M$$

Per cui

$$A_m = \frac{2}{\pi} A_M = 0{,}637 A_M$$

Il *valore efficace* di una grandezza sinusoidale è espresso da:

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T a^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T A_M^2 \sin^2 \omega t \, dt} = \sqrt{\frac{A_M^2}{T}\int_0^T \frac{1-\cos 2\omega t}{2} dt} = \sqrt{\frac{A_M^2}{2T}[T - (\sin 2\omega T - \sin 0)]} = \sqrt{\frac{A_M^2}{2T}T}$$

Ossia

$$A = \frac{A_M}{\sqrt{2}} = 0{,}707 A_M$$

I fattori di comparazione sono uguali per tutte le grandezze sinusoidali.
Il *fattore di forma* ha, per tutte, il valore:

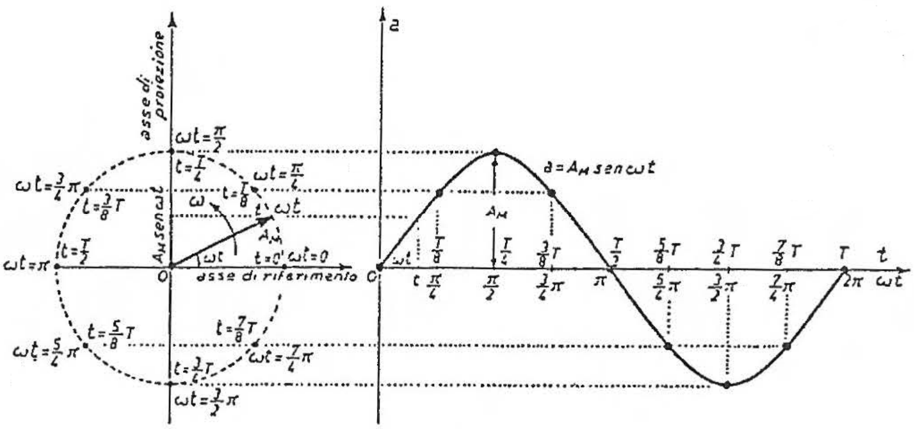
$$k_f = \frac{A}{A_m} = \frac{\frac{A_M}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\pi}A_M} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11$$

Il *fattore di ampiezza* è:

$$k_a = \frac{A_M}{A} = \frac{A_M}{\frac{A_M}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

ed il *fattore di deformazione* è, evidentemente, uguale a. zero.

Consideriamo ora un vettore di modulo A_M (fig. 7) che ruoti attorno alla propria origine con velocità angolare costante ω.



Parametri corrispondenti

Modulo del vettore rotante	$\leftarrow A_M \rightarrow$	*Ampiezza della grandezza sinusoidale*
Velocità angolare costante del vettore rotante	$\leftarrow \omega \rightarrow$	*Pulsazione della grandezza sinusoidale*
Tempo impiegato dal vettore rotante per compiere un giro	$\leftarrow T = {}^{2\pi}/_{\omega} \rightarrow$	*Periodo della grandezza sinusoidale*
Numero di giri al secondo del vettore rotante	$\leftarrow f = {}^{1}/_{T} \rightarrow$	*Frequenza della grandezza sinusoidale*
Angolo al tempo zero del vettore rotante (argomento del vettore)	$\leftarrow \psi \rightarrow$	*Fase della grandezza sinusoidale*

Fig. 7 – Vettore rotante

Supponiamo che all'istante $t = O$ la direzione del vettore coincida con quella di un'asse prestabilito (*asse di riferimento*) e proiettiamo l'estremo del vettore rotante su un secondo asse passante per l'origine e perpendicolare al primo (*asse di proiezione*); si rileva che ad ogni istante, la proiezione del vettore sull'asse di proiezione coincide col valore istantaneo della grandezza sinusoidale:

$$a = A_M \sin \omega t$$

Pertanto, stabilendo la corrispondenza fra i parametri indicata nella figura 7, ogni grandezza sinusoidale definisce uno ed un solo vettore rotante e, viceversa, ad ogni vettore rotante corrisponde una ed una sola grandezza sinusoidale.
I vettori rotanti sono dunque elementi *compiutamente rappresentativi* delle grandezze sinusoidali; tale rappresentazione, come· vedremo, troverà larghissimo impiego nel calcolo delle correnti alternate di tipo sinusoidale.
Per convenzione, si adotta comunemente come senso positivo di rotazione dei vettori, il senso antiorario.
In tutte le precedenti considerazioni sulle grandezze sinusoidali, si è convenuto di scegliere come origine dei tempi l'istante iniziale del semiperiodo positivo della grandezza; ossia l'istante in cui il vettore rotante ha direzione coincidente con l'asse di riferimento (fig. 7).

Se invece scegliamo l'origine dei tempi in un istante diverso, vi sarà un intervallo di tempo t, che intercorre fra l'istante $t = 0$ e quello in cui la grandezza; crescendo, passa per lo zero; di conseguenza il vettore rotante, all'istante iniziale, avrà una direzione che forma, con l'asse di riferimento, l'angolo, argomento del vettore, (fig. 8) pari a:

$$\psi = \omega t_f$$

L'intervallo di tempo t_f, che intercorre fra l'istante iniziale del semiperiodo positivo della grandezza e l'istante scelto come origina dei tempi, si dice fase della grandezza sinusoidale. L'angolo ψ che l'asse di riferimento forma con la direzione del vettore rotante all'istante $t = 0$ si chiama angolo di fase della grandezza.

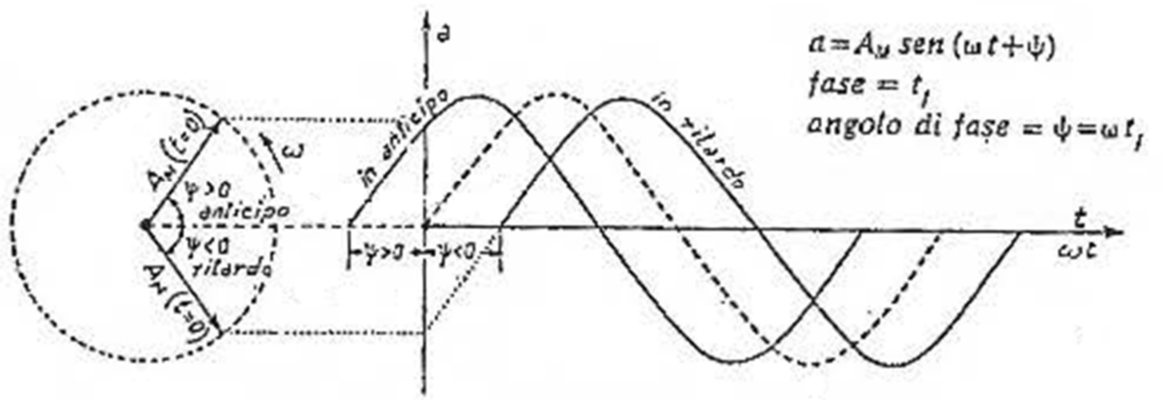


Fig. 8 – Fase di una grandezza sinusoidale

Quando la fase di una grandezza sinusoidale è diversa da zero, la sua rappresentazione cartesiana risulta traslata lungo l'asse dei tempi, rispetto alla rappresentazione relativa a $t_f = 0$, di un intervallo t_f (fig. 8).
Se l'istante iniziale del semiperiodo positivo della grandezza precede l'istante $t = 0$, la fase della grandezza si dice in anticipo; se l'istante iniziale del semiperiodo positivo della grandezza succede all'istante $t = 0$, la fase della grandezza si dice in ritardo.
Quando la grandezza ha una fase t_f *in anticipo* (cioè passa per lo zero t_f secondi prima dell'istante scelto come origine dei tempi), il suo diagramma cartesiano risulta traslato, rispetto a quello relativo a $t_f = 0$, verso sinistra (fig. 8); inoltre, il suo vettore rotante, all'istante $t = 0$, ha una direzione che risulta spostata rispetto all'asse di riferimento, di un angolo $\psi = \omega t_f$, nel senso positivo della rotazione. Per tale ragione, *agli angoli di fase in anticipo viene attribuito il segno positivo*.
Al contrario, quando la grandezza ha una fase t_f *in ritardo* (cioè passa per lo zero t_f secondi dopo l'istante iniziale), il diagramma cartesiano risulta spostato verso destra ed il vettore rotante, all'istante $t = 0$, non ha ancora raggiunto l'asse di riferimento, ma ne è ancora distante dell'angolo $\psi = \omega t_f$. Pertanto, *agli angoli di fase in ritardo viene attribuito il segno negativo*.

Anche l'espressione algebrica usata in precedenza per rappresentare una grandezza sinusoidale:

$$a = A_M \sin \omega t$$

corrisponde ovviamente al caso particolare in cui t_f e ψ sono nulli.
In generale, quando la grandezza ha una fase t_f diversa da zero e quindi un angolo di fase non nullo $\psi = \omega t_f$, la sua espressione assume la forma:

$$a = A_M \sin(\omega t + \psi)$$

dove, secondo la convenzione adottata, *ψ è positivo per grandezze con fase in anticipo ed è negativo per grandezze con fase in ritardo*.
La considerazione della fase di una grandezza sinusoidale può apparire superflua allorché il nostro esame si limita a una sola grandezza, indipendentemente da altre. Infatti, poiché l'origine dei tempi può essere scelta ad arbitrio, essa può essere fatta coincidere con l'istante d'inizio del semiperiodo positivo; ed in tal caso, come è stato rilevato, $t_f = 0$ e $\psi = 0$.
Quando invece debbono prendersi contemporaneamente in esame più grandezze sinusoidali, si potrà ancora scegliere l'origine dei tempi in modo che una qualunque di esse, scelta a piacere, risulti di fase zero; però, fissata l'origine dei tempi per una grandezza, essa risulta determinata anche per tutte le altre, le quali allora, in generale, avranno una fase diversa da zero.
Pertanto, quando debbono essere considerate contemporaneamente più grandezze sinusoidali, con riferimento le une alle altre, ciascuna di esse non risulta compiutamente individuata se non è nota anche la sua fase.
Consideriamo ora due grandezze sinusoidali isofrequenziali:

$$\begin{cases} a_1 = A_{1M} \sin(\omega t + \psi_1) \\ a_2 = A_{2M} \sin(\omega t + \psi_2) \end{cases}$$

Si dice differenza di fase φ[5], fra a_1 e a_2, la differenza fra i rispettivi angoli di fase:

$$\varphi = \psi_2 - \psi_1$$

Essa corrisponde, ovviamente, all'angolo di fase che avrebbea_2 se si scegliesse. come origine dei tempi, l'istante in cui a_1, crescendo, passa per lo zero (in questo caso, infatti, avremmo $\psi_1 = 0$ e perciò $\varphi = \psi_2$)

[5] Per maggiore chiarezza, useremo sempre la lettera φ per indicare le differenze angolari di fase fra le grandezze (*fase relativa di una grandezza rispetto ad un'altra*); useremo la lettera ψ per indicare la fase di ciascuna grandezza rispetto all'asse di riferimento comune prescelto (*fase assoluta della grandezza*).

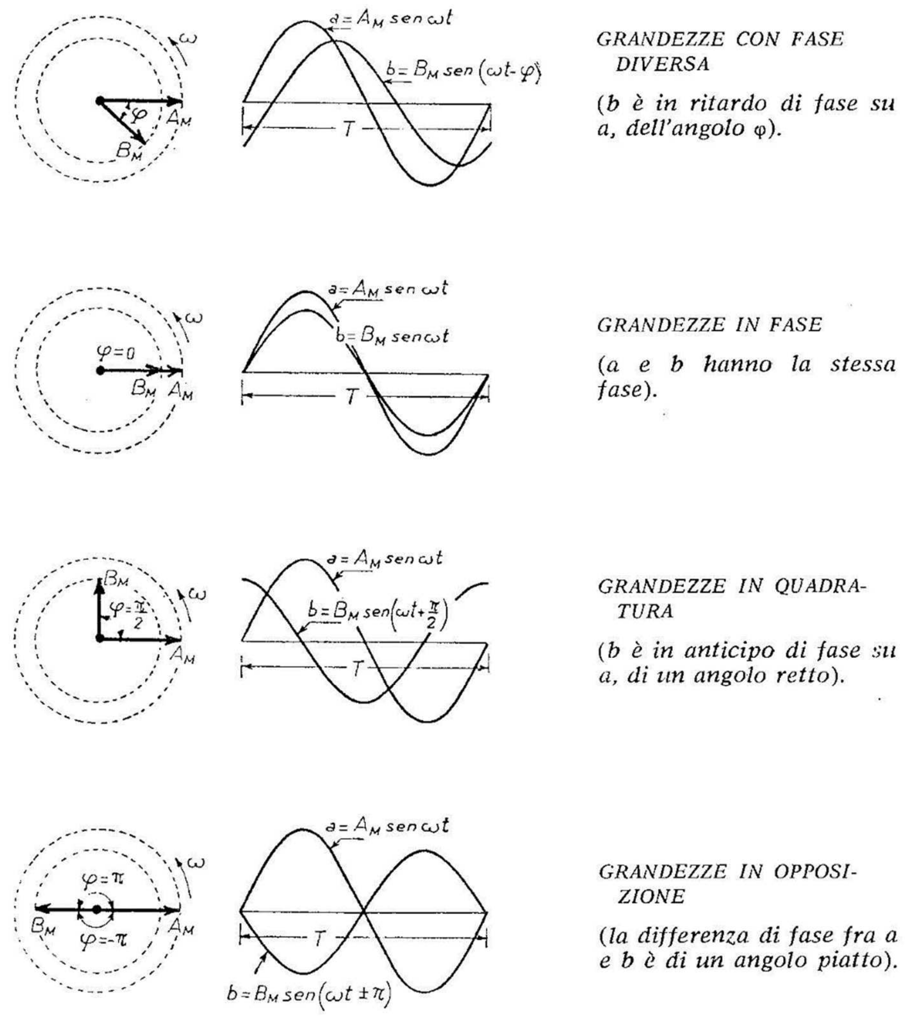


Fig. 9 – Differenza di fase fra grandezze sinusoidali isofrequenziali

La differenza di fase fra a_2 ed a_1 risulta positiva se a_2 è in anticipo su a_1; risulta negativa nel caso contrario.
Naturalmente, quando si considera la-differenza di fase fra due; grandezze, è necessario fissare con chiarezza a quale delle due si fa riferimento; infatti la differenza di fase φ muta di segno, se, invece di considerare la fase della seconda grandezza rispetto alla prima, si considera la fase della prima rispetto alla seconda.
Quando è necessario, sarà bene pertanto specificare, mediante un indice aggiunto alla lettera φ, a quale delle due grandezze è fatto riferimento.
Se due grandezze sinusoidali hanno differenza di fase nulla ($\varphi = 0$), esse si dicono *in fase*; se la differenza di fase è di un quarto. di periodo ($\varphi = \pm {}^{\pi}/_{2}$), esse si dicono *in quadratura*; se la differenza di fase è di mezzo periodo ($\varphi = \pi$), esse si dicono *in opposizione* (fig. 9).
Dalle considerazioni precedenti si deduce che nel caso generale di contemporanea considerazione di più grandezze sinusoidali, ciascuna di esse risulta compiutamente definita quando se ne conoscono i tre parametri:

1) la *frequenza* f; oppure il *periodo* T $\left(T = {}^{1}/_{f}\right)$; oppure la *pulsazione* ω $\left(\omega = 2\pi f = {}^{2\pi}/_{T}\right)$.
2) l'*ampiezza* A_M; oppure il *valore efficace* A $\left(A = {}^{A_M}/_{\sqrt{2}}\right)$; oppure il *valore medio in un semiperiodo* A_m $\left(A_m = {}^{2A_M}/_{\pi} = {}^{2\sqrt{2}A}/_{\pi}\right)$;
3) 1a *fase* t_f rispetto all'origine comune dei tempi; oppure l'*angolo di fase* ψ $\left(\psi = \omega t_f\right)$ rispetto all'asse di riferimento prescelto; oppure la *differenza di fase* φ, rispetto ad una grandezza nota

Le grandezze sinusoidali nei circuiti a corrente alternata

Lo studio dei metodi di calcolo delle grandezze sinusoidali è di capitale interesse nell'elettrotecnica, perché gran parte delle grandezze alternate (correnti, tensioni, campi elettrici, campi magnetici, ecc.) che si producono e si utilizzano negli usuali impianti tecnici, specialmente alle frequenze industriali, hanno un andamento nel tempo che, più o meno, si avvicina alla legge sinusoidale.

Le ragioni per le quali, negli impianti a corrente alternata, si tende ad imprimere e mantenere alle varie grandezze un andamento sinusoidale, sono facilmente comprensibili se si pensa che il regime elettrico che si stabilisce nel circuito è determinato, istante per istante, dai valori delle varie grandezze (f.e.m., correnti, cadute di tensione, campi elettrici, flussi magnetici, ecc.) che si combinano nel circuito stesso.

Tali grandezze sono tutte variabili nel tempo e pertanto il regime del circuito varia, da istante ad istante, con un andamento tanto più irregolare, quanto più le leggi di variazione delle grandezze che lo determinano, sono diverse l'una dall'altra; esso assume, al contrario, un andamento di maggiore uniformità, se tutte le grandezze operanti nelle varie parti, variano nel tempo con un andamento dello stesso tipo, ossia, come si dice comunemente, se possiedono tutte una stessa *forma d'onda*[6].

Come è noto, alcune delle grandezze che operano in un circuito vengono introdotte dall'esterno (ad esempio, la tensione di alimentazione, le f. e. m. indotte mediante accoppiamenti induttivi, ecc.), mentre le altre si generano nel circuito stesso ad opera delle prime (ad esempio, le correnti, le cadute di tensione, le f. e. m. d'autoinduzione, ecc.), in virtù dei fenomeni fisici ben noti.

Ora è facile rilevare che *l'unica forma d'onda delle grandezze alternative, che si riproduca immutata attraverso le operazioni matematiche contenute nelle principali leggi dell'elettrostatica e dell'elettromagnetismo, che determinano il regime elettrico del circuito, è proprio la forma sinusoidale*[7].

Quanto più la legge di variazione delle grandezze si allontana dalla sinusoide, tanto maggiori sono l'ampiezza e la frequenza delle armoniche superiori presenti nello sviluppo in serie di Fourier. Tali armoniche, a causa della loro più elevata frequenza, generano negli impianti fenomeni assai complessi, che molto spesso hanno effetti nocivi sul circuito stesso (sensibile alterazione del regime del circuito, aumento di perdite di energia, ecc.) e possono anche essere causa di disturbi in circuiti esterni.

Nella maggior parte dei casi, il calcolo d'un circuito a corrente alternata viene eseguito attribuendo alle grandezze alternative il carattere di sinusoidalità. Ed anche in quei casi nei quali esse hanno una forma d'onda che si discosta sensibilmente dalla sinusoide, è utile molto spesso effettuare, in prima approssimazione, un calcolo preventivo del circuito, supponendolo in regime. sinusoidale.

La vastità dell'impiego delle grandezze sinusoidali nella tecnica dei circuiti a corrente alternata, rende dunque necessaria l'istituzione di agevoli metodi e procedimenti di calcolo per la loro determinazione. Tali procedimenti traggono origine da diverse forme di rappresentazione delle grandezze sinusoidali, che la pratica dei calcoli ha indicato come le più valide nei vari casi.

Studieremo ora le forme più usate per la rappresentazione delle grandezze sinusoidali: *la rappresentazione algebrica, la rappresentazione polare* e la conseguente *rappresentazione simbolica*; e dedurremo, in base alle loro peculiari caratteristiche, la più idonea applicazione di ciascuna di esse ai vari tipi di calcolo che più comunemente si effettuano nella tecnica dei circuiti a corrente alternata in regime sinusoidale.

---

[6] L'espressione *forma d'onda* ha in questo caso il significato di forma geometrica del diagramma cartesiano rappresentativo dell'andamento nel tempo della grandezza e non ha connessione coi fenomeni di propagazione a onda delle perturbazioni elettromagnetiche.

[7] Tali operazioni sono infatti quelle di *addizione e sottrazione* (che debbono eseguirsi, ad esempio, per la determinazione della corrente principale risultante di più correnti derivate, oppure per il calcolo della tensione ai terminali di una linea, dedotta dalla tensione di alimentazione e dalla caduta di tensione della linea stessa, ecc.) e quelle di *derivazione e integrazione* (che debbono eseguirsi , ad esempio, per il calcolo della f. e. m. generata da un campo magnetico variabile, oppure per la determinazione della carica accumulata da una corrente sulle armature d'un condensatore, ecc.).

Sommario