Compito di Elettrotecnica

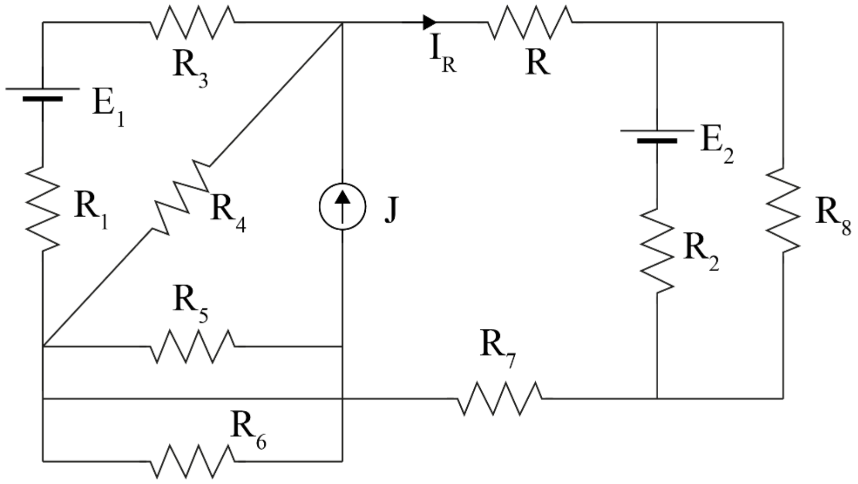
23 Gennaio 2025

Nome e Cognome ………………………………………………………… Matricola……………………

Corso di Laurea…………………………………………………

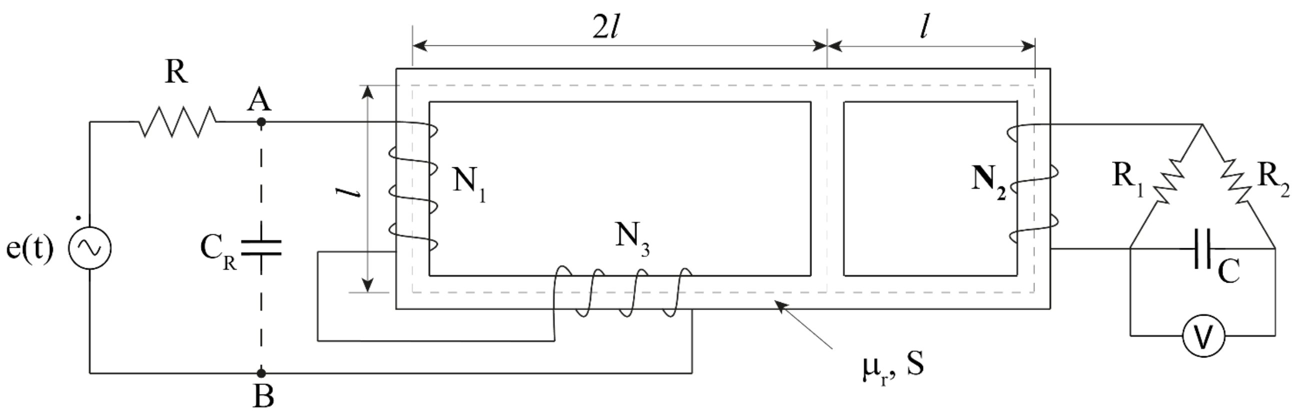
ES.1 – Il circuito in figura è a regime. Si richiede di determinare la corrente I_R che attraversa la resistenza R, applicando il teorema di Norton. Inoltre, calcolare la potenza dissipata sulla resistenza R_8.

$$\mathbf{E_1 = 10\ V;\ E_2 = 5\ V;\ J = 2\ A;\ R = 5\ \Omega;\ R_1 = 3\ \Omega;\ R_2 = 4\ \Omega;\ R_3 = 5\ \Omega;}$$
$$\boldsymbol{R_4} \mathbf{= 1\ \Omega;\ R_5 = 3\ \Omega;\ R_6 = 4\ \Omega;\ R_7 = 7\ \Omega;\ R_8 = 2\ \Omega.}$$



ES.2 – Il sistema rappresentato è a regime. Si richiede di determinare il valore della capacità da collegare tra i punti A e B per rifasare il carico a valle della sezione a $cos\varphi = 0.98$. Inoltre, determinare il valore della tensione misurato dal voltmetro ideale V.

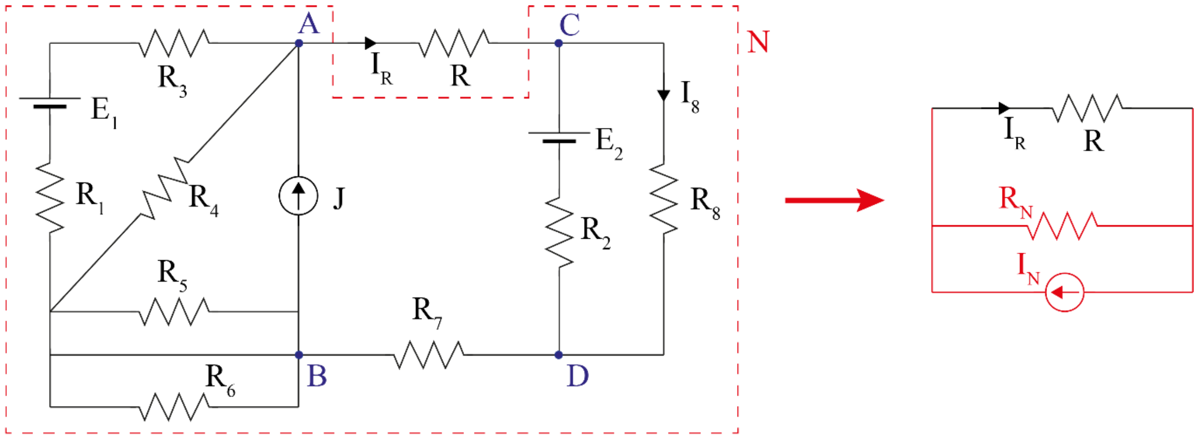
$$\boldsymbol{e(t) = 10\sin(\omega t + \pi/4)\ \mathrm{V};\ \omega = 100\ \mathrm{rad/s};\ \mu_r = 1000;\ \mathrm{R} = 5\ \Omega;\ R_1 = 8\ \Omega;\ R_2 = 2\ \Omega;}$$
$$\boldsymbol{C = 10\ \mu F;\ \mathrm{N_1} = 200;\ N_2 = 250;\ \mathrm{N_3} = 150;\ l = 2cm;\ S = 4\ \mathrm{cm}^2}$$



Esercizio 1

Applico il teorema di Norton al sistema in figura, ovvero sostituiamo alla rete N il generatore equivalente di corrente.

#1



Applicando la regola del partitore di corrente ad un parallelo costituito da due sole resistenze, si ottiene la corrente I_R che attraversa la resistenza R:

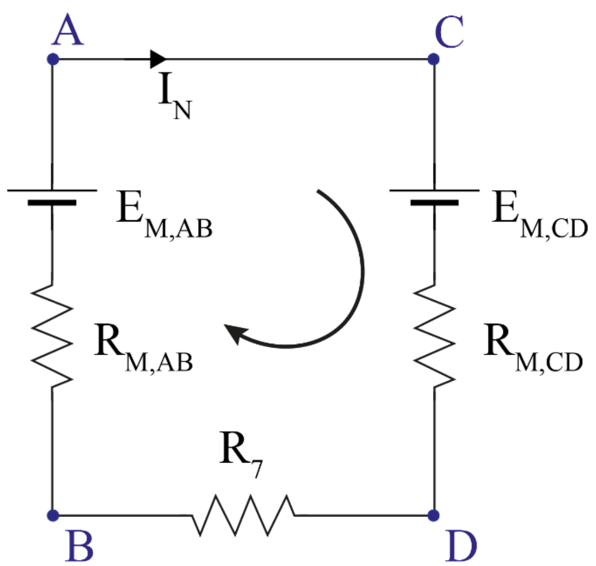
$$I_R = I_N \frac{R_N}{R_N + R}$$

Le incognite sono I_N ed R_N.

La I_N è la corrente di cortocircuito che scorre nel ramo una volta cortocircuitato ($I_N = I_{cc}$). Sostituisco quindi la resistenza R con un corto circuito. Le resistenze R_5 ed R_6 sono in parallelo ad un corto circuito e quindi si possono trascurare.

Applichiamo il teorema di Millman tra i nodi A e B e tra i nodi C e D:

#2



$$E_{M,AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1 + R_3} + J}{\frac{1}{R_1 + R_3} + \frac{1}{R_4}} = 2.88\ V$$

$$R_{M,AB} = \frac{1}{\frac{1}{R_1 + R_3} + \frac{1}{R_4}} = 0.89\ \Omega$$

$$E_{M,CD} = \frac{\frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_8}} = 1.67\ V$$

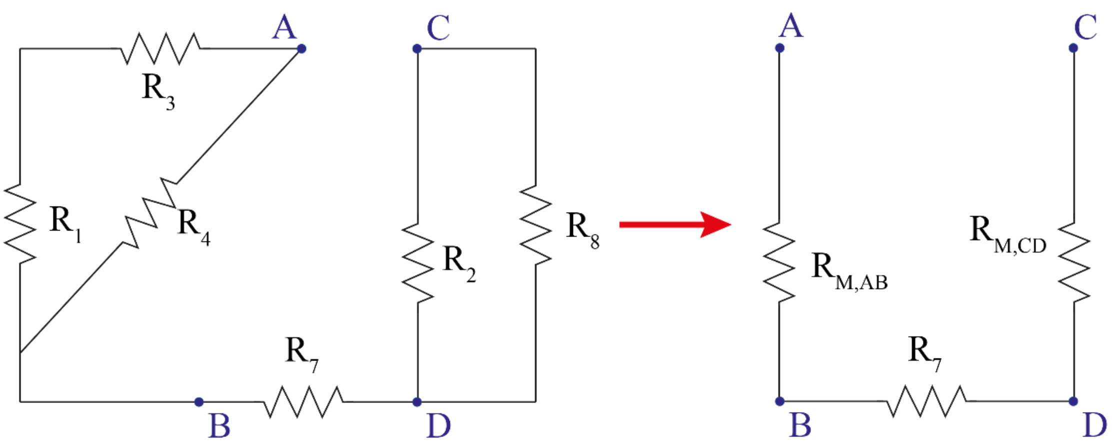
$$R_{M,CD} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_8}} = 1.33\ \Omega$$

Applichiamo l'equazione alla maglia (percorsa in senso orario) per ricavare il valore della corrente I_N.

$$E_{M,AB} - E_{M,CD} = (R_{M,AB} + R_{M,CD} + R_7)\ I_N$$

$$I_N = \frac{E_{M,AB} - E_{M,CD}}{R_{M,AB} + R_{M,CD} + R_7} = 0.1325\ A$$

Passiviamo la rete per ricavare la resistenza R_N vista dai morsetti AC (ovvero sostituiamo tutte le fem dei generatori indipendenti di tensione con un cortocircuito ed apriamo tutti i generatori indipendenti di corrente).



$$R_N = R_{M,AB} + R_7 + R_{M,CD} = 9.22\ \Omega$$

Quindi $I_R = 0.0859\ A$

La potenza dissipata sulla resistenza R_8 è $P_{R_8} = V_{CD} I_8 = R_8 I_8^2 = R_8 \left(\frac{V_{CD}}{R_8}\right)^2$

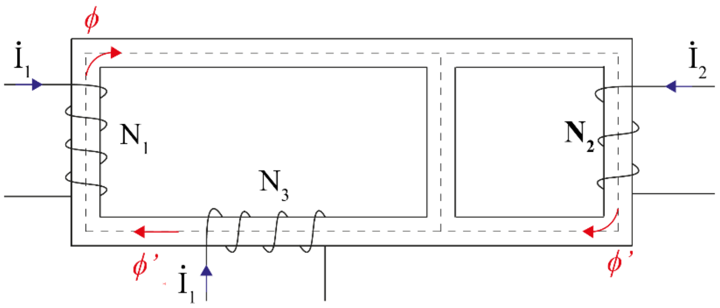
Dal circuito #2 ricavo la V_{CD} usando la legge di Ohm:

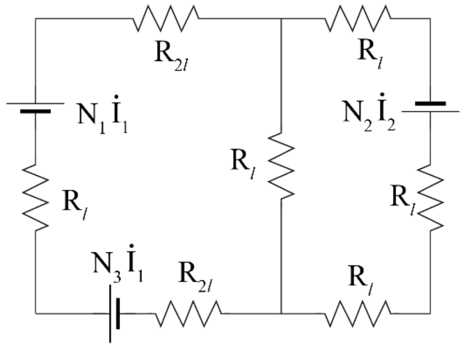
$$V_{CD} = E_{M,CD} + R_{M,CD} I_N = 1.84\ V$$

Quindi $P_{R_8} = 1.699\ W$

Esercizio 2

Trasformiamo il circuito magnetico nell'equivalente elettrico:





Calcoliamo le riluttanze equivalenti:

$$R_l = \frac{l}{\mu_0 \mu_r S} = 3.979 \times 10^4\ H^{-1} \qquad R_{2l} = \frac{2l}{\mu_0 \mu_r S} = 7.958 \times 10^4\ \mathrm{H}^{-1}$$

$$\mathcal{R}_{eq_1} = \mathcal{R}_{eq_3} = \frac{1}{\frac{1}{3R_l} + \frac{1}{R_l}} + 2R_{2l} + R_l = 1.989 \times 10^5\ \mathrm{H}^{-1}$$

$$\mathcal{R}_{eq_2} = \frac{1}{\frac{1}{2R_{2l} + R_l} + \frac{1}{R_l}} + 3R_l = 1.525 \times 10^5\ \mathrm{H}^{-1}$$

Calcoliamo i coefficienti di auto induzione:

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}_{eq_1}} = 0.2\ H \qquad L_2 = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}_{eq_2}} = 0.41\ H \qquad L_3 = \frac{N_3^2}{\mathcal{R}_{eq_3}} = 0.11\ H$$

Calcoliamo i coefficienti di mutua induzione (tutte >0):

$$M_{12} = M_{21} = \alpha_{12} \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}_{eq_2}} = 0.082\ H$$

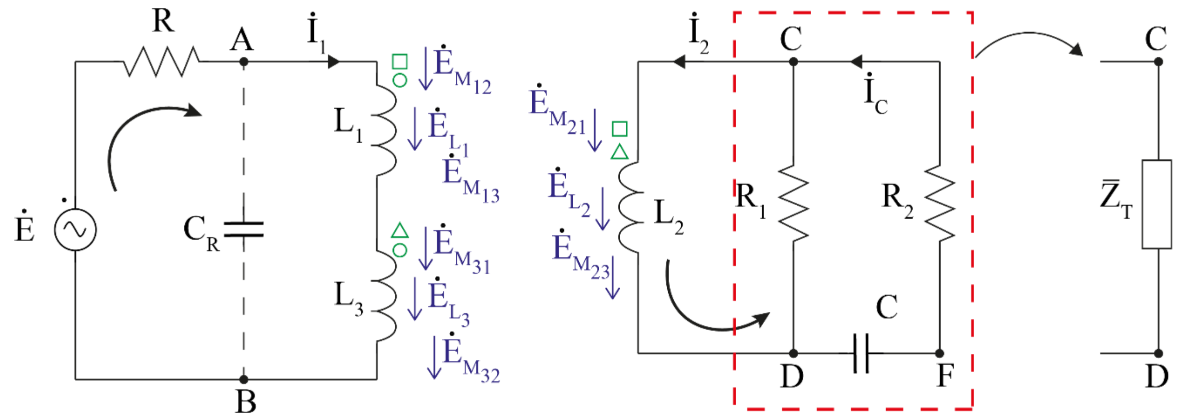
$$M_{13} = M_{31} = \sqrt{L_1 L_3} = 0.15\ H$$

$$M_{23} = M_{32} = \alpha_{23} \frac{N_2 N_3}{\mathcal{R}_{eq_3}} = 0.047\ H$$

Dove i coefficiente di ripartizione del flusso sono:

$$\alpha_{12} = \alpha_{23} = \frac{R_l}{4R_l} = 0.25$$

Il circuito passando al dominio dei fasori diventa:



$$\dot{E} = \frac{10}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j\frac{10}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5 + j5$$

Dove l'impedenza equivalente Z_T tra i nodi C e D è:

$$\bar{Z}_T = \frac{1}{\dfrac{1}{R_2 - \dfrac{j}{\omega C}} + \dfrac{1}{R_1}} = 7.9994 - j0.064\ \Omega$$

Calcoliamo le correnti $\dot{I}_1$ e $\dot{I}_2$ risolvendo il sistema costituito dalle equazioni alle due maglie (la maglia a sinistra è percorsa in senso orario, mentre quella a destra in senso antiorario):

$$\begin{cases} \dot{E} + \dot{E}_{L_1} + \dot{E}_{L_3} + \dot{E}_{M_{12}} + \dot{E}_{M_{13}} + \dot{E}_{M_{31}} + \dot{E}_{M_{32}} = \dot{I}_1 R \\ \dot{E}_{L_2} + \dot{E}_{M_{21}} + \dot{E}_{M_{23}} = \dot{I}_2 \bar{Z}_T \end{cases}$$

Sostituendo le varie f.e.m. e tenendo presente che le mutue sono > 0 abbiamo:

$$\begin{cases} \dot{E} - j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega L_3 \dot{I}_1 - j\omega M_{12} \dot{I}_2 - j\omega M_{13} \dot{I}_1 - j\omega M_{31} \dot{I}_1 - j\omega M_{32} \dot{I}_2 = \dot{I}_1 R \\ -j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M_{21} \dot{I}_1 - j\omega M_{23} \dot{I}_1 = \dot{I}_2 \bar{Z}_T \end{cases}$$

Da cui:

$$\dot{I}_1 = 0.0945 - j0.0773\ A$$
$$\dot{I}_2 = -0.033 + 0.0179\ A$$

Per il calcolo della capacità da inserire tra A e B per rifasare parzialmente in carico, calcolo la potenza complessa tra A e B: $\bar{S}_{AB} = \dot{V}_{AB}\breve{I}_1$
Dalla legge di Ohm generalizzata ricavo la $\dot{V}_{AB}$:

$$\dot{V}_{AB} = \dot{E} - R\dot{I}_1 = 4.528 + j5.386\ V$$

La potenza complessa è: $\bar{S}_{AB} = P_{AB} + jQ_{AB} = 0.0114 + j0.8587\ VAC$

La potenza attiva $P_{AB} = 0.0114\, W$
La potenza reattiva $Q_{AB} = 0.8587\, VAR$

Da cui si ricava che l'angolo è: $\varphi_C = \text{atan}\left(\frac{Q_{AB}}{P_{AB}}\right) = 89.24°$

L'angolo richiesto è: $\varphi = \text{acos}(0.98) = 11.48°$

Essendo $\varphi_C > \varphi$ bisogna rifasare:

$$C_R = \frac{Q_{AB} - P_{AB}\tan(\varphi)}{\omega V_{AB}^2} = 1.73 \times 10^{-4}\, F$$

Dove $V_{AB} = |\dot{V}_{AB}|$

Il valore misurato dal voltmetro è il valore efficace della $\dot{V}_{DF}$. Troviamo la corrente $\dot{I}_C$ che circola sul ramo DF utilizzando il partitore di corrente:

$$\dot{I}_C = \dot{I}_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2 - \frac{j}{\omega C}} = -0.0236 + j0.0199\, A$$

Utilizzando la legge di Ohm troviamo la tensione $\dot{V}_{DE}$:

$$\dot{V}_{DF} = -\frac{j}{\omega C}\dot{I}_C = -3.838 \times 10^{-6} + j\, 3.224 \times 10^{-6}\, V$$

Poiché il voltmetro indica il valore efficace di tensione:

$$V_{DF} = \left|\dot{V}_{DF}\right| = \sqrt{(-3.838 \times 10^{-6})^2 + (3.224 \times 10^{-6})^2} = 5.01 \times 10^{-6}\, V$$