Compito di Elettrotecnica

9 Gennaio 2025

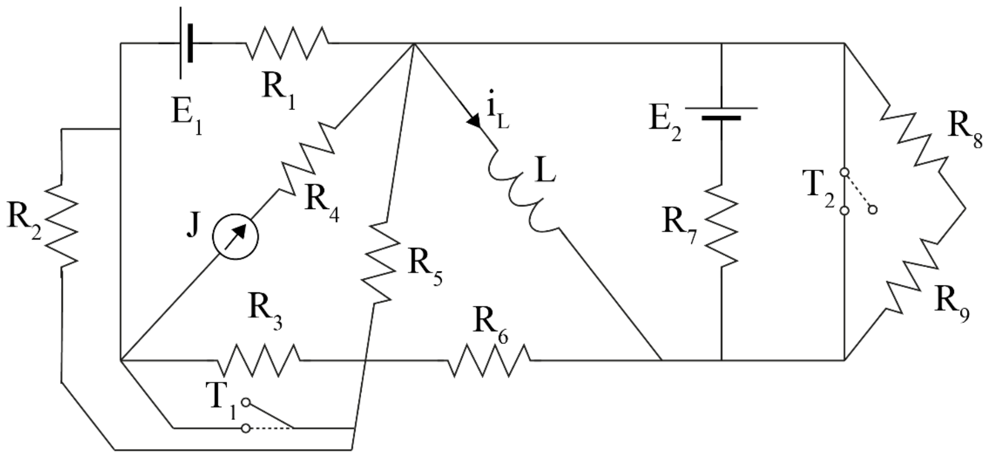
Nome e Cognome ………………………………………………………….. Matricola……………………

Corso di Laurea…………………………………………………

Orale giorno 10 gennaio? SI ☐ **NO** ☐

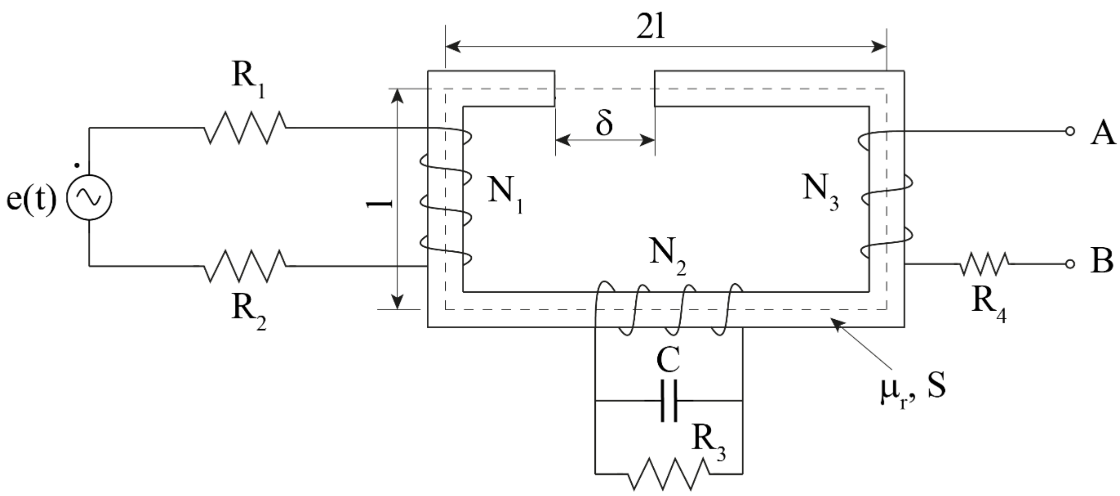
ES.1 – Il circuito in figura è a regime. All'istante t=0 il tasto T_1 si chiude ed il tasto T_2 si apre. Determinare e rappresentare graficamente l'andamento temporale della corrente $\mathbf{i_L}$. **L** si carica o si scarica?

$$\mathbf{E_1 = 10\ V;\ E_2 = 5\ V;\ J = 2\ A;\ L\ = 0.5\ mH;\ R_1 = 3\ \Omega;\quad R_2 = 4\ \Omega;\ \ R_3 = 5\ \Omega;}$$
$$\boldsymbol{R_4} \mathbf{= 1\ \Omega;\ R_5 = 3\ \Omega;\quad R_6 = 4\ \Omega;\quad R_7 = 7\ \Omega\quad R_8 = 2\ \Omega\quad R_9 = 10\ \Omega.}$$



ES.2 – Dato il seguente circuito a regime, determinare la tensione ai capi di A-B e la corrente che scorre sul ramo in cui è presente il capacitore **C.**

$$\boldsymbol{e(t)} = \sqrt{\mathbf{2}}\ \mathbf{sin(\omega t)\ V};\ \boldsymbol{\omega} = \mathbf{314\ rad/s};\ \boldsymbol{\mu_r} = \mathbf{1000};\ \boldsymbol{R_1} = \mathbf{8\ \Omega};\ \boldsymbol{R_2} = \mathbf{2\ \Omega};\ \mathbf{R_3 = 5\ \Omega};$$
$$\mathbf{R_4 = 8\ \Omega;\ \ C = 2mF;\ N_1 = 200;} \boldsymbol{N_2} = \mathbf{250;\ N_3 = 150;} \boldsymbol{l} = \mathbf{2}\boldsymbol{cm}; \boldsymbol{\delta} = \mathbf{0.5}\ \boldsymbol{cm};\ \boldsymbol{S} = \mathbf{4}\ \boldsymbol{cm^2}$$

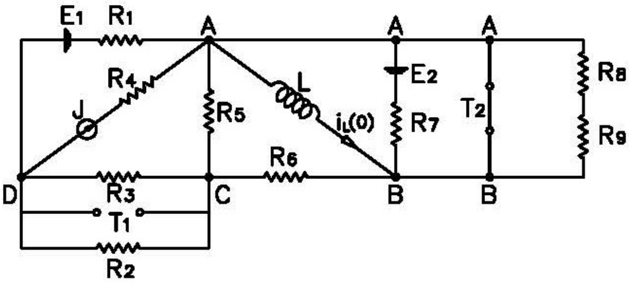


Esercizio 1

L'espressione istantanea della corrente in L è:

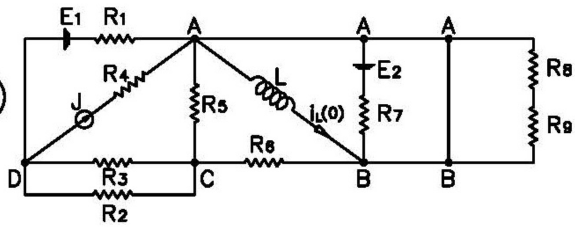
$$i_L(t) = i_L(0)e^{-t/\tau} + i_L(\infty)\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Calcoliamo $\boldsymbol{i_L(0)}$. All'istante $t = 0$ il circuito è



Eliminando il ramo DC aperto si ha:

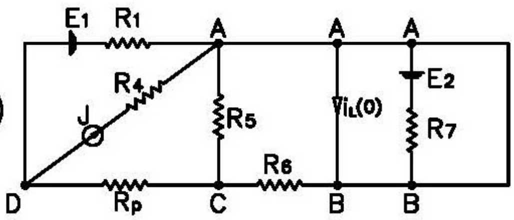
#2



Il collegamento serie tra R_8 e R_9 è in parallelo ad un corto circuito e quindi si elimina e facendo il parallelo tra R_3 e R_2 si ha:

$$R_p = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

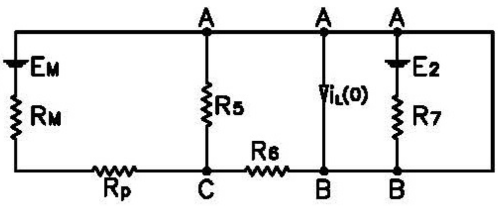
#3



Applicando Millman tra i nodi A e D si ottiene:

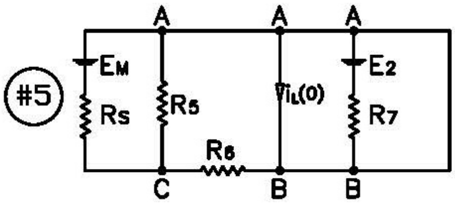
$$E_M = \frac{-\frac{E_1}{R_1} + J}{\frac{1}{R_1}} \quad R_M = \frac{1}{\frac{1}{R_1}} = R_1$$

#4



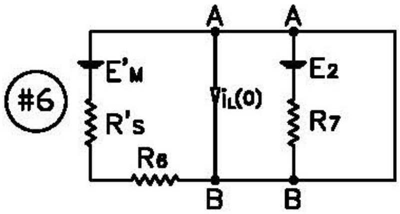
Facendo la serie tra R_M e R_p si ha:

$$R_S = R_M + R_p$$



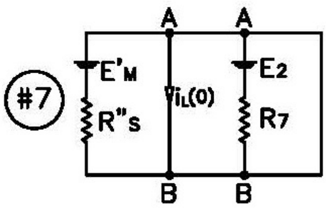
Applicando Millman tra i nodi A e C si ottiene:

$$E'_M = \frac{\frac{E_M}{R_S} + \frac{0}{R_5}}{\frac{1}{R_S} + \frac{1}{R_5}} \quad R'_S = \frac{1}{\frac{1}{R_S} + \frac{1}{R_5}}$$

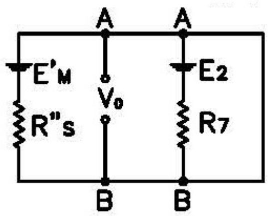


Facendo la serie tra R'_S e R_6 si ha:

$$R''_S = R'_S + R_6$$



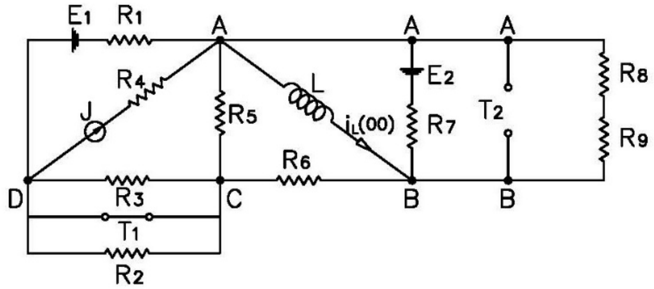
Per calcolare $i_L(0)$ applichiamo Thevenin, per cui il circuito diventa:



Per calcolare V_0 andiamo da A a B attraverso il corto circuito a destra di $E_2 - R_7$ e quindi $V_0 = 0\ V$.
Inutile calcolare la resistenza R_{Th} vista dai morsetti aperti una volta passivata la rete e, in definitiva si ha:

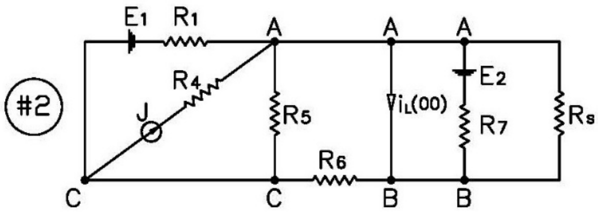
$$i_L(0) = \frac{V_0}{R_{Th}} = 0\ A$$

Calcoliamo $\boldsymbol{i_L}(\infty)$. A transitorio estinto il circuito è



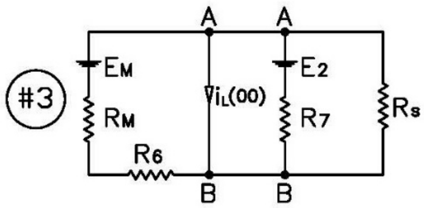
Eliminando il ramo aperto AB, trascurando le resistenze R_3 e R_2 in parallelo ad un corto circuito e facendo la serie tra R_8 e R_9, si ottiene:

$$R_S = R_8 + R_9$$



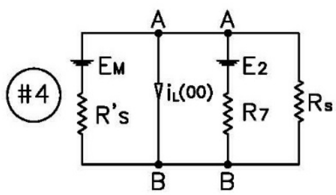
Applicando Millman tra i nodi A e C (rami E_1-R_1, J e R_5) si ha:

$$E_M = \frac{-\frac{E_1}{R_1} + J + \frac{0}{R_5}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5}} \quad R_M = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5}} = \frac{R_1 R_5}{R_1 + R_5}$$



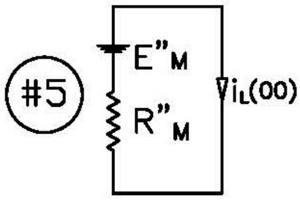
facendo la serie tra R_M e R_6, si ottiene:

$$R'_S = R_M + R_6$$



Applicando Millman tra i nodi A e B (rami E_M-R'_S, E_2-R_7 e R_S) si ha:

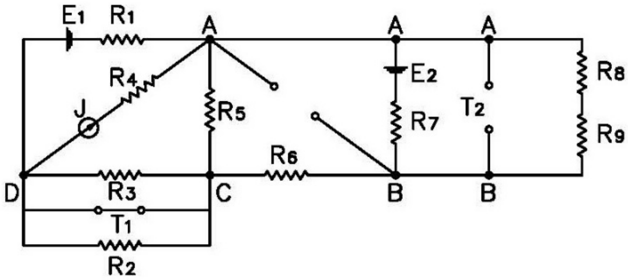
$$E''_M = \frac{\frac{E_M}{R'_S} + \frac{E_2}{R_7} + \frac{0}{R_S}}{\frac{1}{R'_S} + \frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_S}} \quad R''_M = \frac{1}{\frac{1}{R'_S} + \frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_S}}$$



E quindi:

$$i_L(\infty) = \frac{E''_M}{R''_M}$$

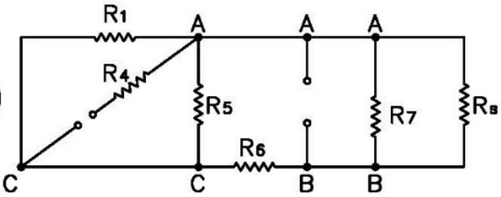
Calcoliamo R_L. A transitorio estinto il circuito è



Eliminando il ramo con T$_2$ aperto, trascurando le resistenze R_3 e R_2 in parallelo ad un corto circuito, facendo la serie tra R_8 e R_9 e passivando la rete si ottiene:

$$R_S = R_8 + R_9$$

#2

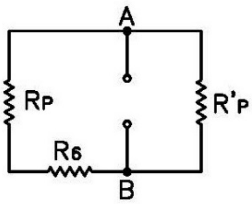


Eliminando R_4 perché ramo aperto e facendo parallelo tra R_1 e R_5 e parallelo tra R_7 e R_S, si ha:

$$R_P = \frac{R_1 R_5}{R_1 + R_5}$$

$$R'_P = \frac{R_7 R_S}{R_7 + R_S}$$

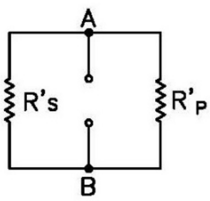
#3



Facendo la serie tra R_P e R_6, si ottiene:

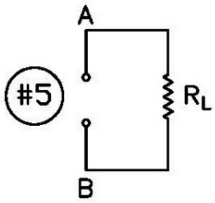
$$R'_S = R_P + R_6$$

#4



Quindi R_L è il parallelo tra R_S' e R_P'

$$R_L = \frac{R_S' R_P'}{R_S' + R_P'}$$



Da cui:

$$\tau = \frac{L}{R_L}$$

In conclusione:

$$\boldsymbol{i_L(t) = i_L(0)e^{-t/\tau} + i_L(\infty)\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = \frac{E_M''}{R_M''}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = \frac{E_M''}{R_M''}\left(1 - e^{-\frac{R_L}{L}t}\right)}$$

Ed essendo

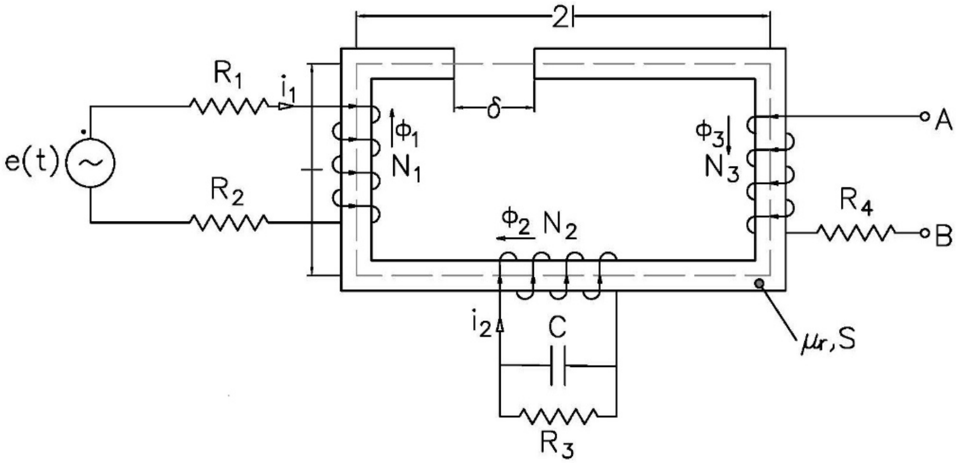
$$i_L(0) = 0\ A$$

e

$$i_L(\infty) = \frac{E_M''}{R_M''}$$

Si deduce che l'induttore *L* si carica.

Esercizio 2



Calcoliamo i coefficienti di auto e mutua induzione tenendo presente che tutti gli accoppiamenti mutui sono perfetti:

$$\mathcal{R}_c = \frac{l}{\mu_0 \mu_r S}$$

$$\mathcal{R}_{g1} = \frac{2l}{\mu_0 \mu_r S}$$

$$\mathcal{R}_{g2} = \frac{2l - \delta}{\mu_0 \mu_r S}$$

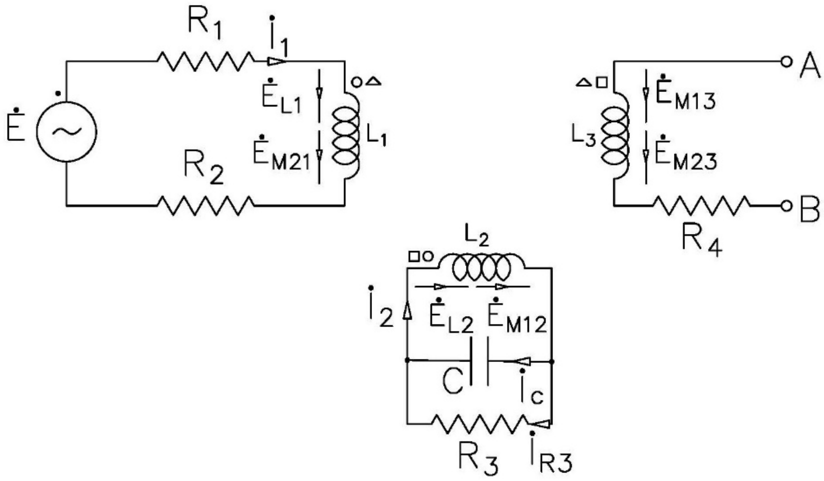
$$\mathcal{R}_0 = \frac{\delta}{\mu_0 S}$$

$$\mathcal{R}_{eq} = 2\mathcal{R}_c + \mathcal{R}_{g1} + \mathcal{R}_{g2} + \mathcal{R}_0$$

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}_{eq}} \qquad L_2 = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}_{eq}} \qquad L_3 = \frac{N_3^2}{\mathcal{R}_{eq}}$$

$$M_{12} = \sqrt{L_1 L_2} > 0 \quad M_{23} = \sqrt{L_2 L_3} > 0 \quad M_{31} = \sqrt{L_3 L_1} > 0$$

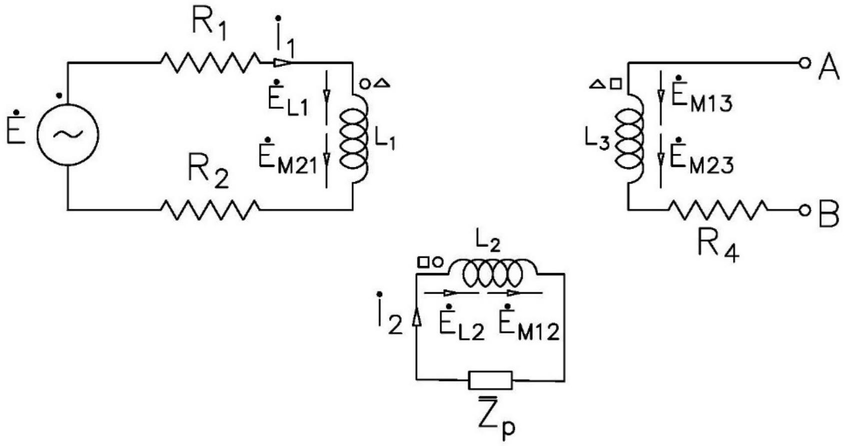
Il sistema diventa:



Facciamo il parallelo tra $\overline{Z}_c = -j\,{}^{1}/_{\omega C}$ e R_3

$$\overline{Z}_p = \frac{\overline{Z}_c R_3}{\overline{Z}_c + R_3}$$

Il circuito diventa:



Calcoliamo le correnti $\dot{I}_1$ e $\dot{I}_2$ e per farlo scriviamo le equazioni alle maglie:

$$\dot{E} + \dot{E}_{L1} + \dot{E}_{M21} = R_1\dot{I}_1 + R_2\dot{I}_1 \qquad \text{maglia } (\dot{E}, R_1, L_1, R_2, \dot{E})$$

$$\dot{E}_{L2} + \dot{E}_{M12} = \overline{Z}_p\dot{I}_2 \qquad \text{maglia } (L_2, \overline{Z}_p, L_2\,) \text{ in senso orario}$$

Sostituendo le varie f.e.m. e tenendo presente che tutte le mutue sono >0, abbiamo:

$$\dot{E} - j\omega L_1\dot{I}_1 - j\omega M_{21}\dot{I}_2 = R_1\dot{I}_1 + R_2\dot{I}_1$$

$$-j\omega L_2\dot{I}_2 - j\omega M_{12}\dot{I}_1 = \overline{Z}_p\dot{I}_2$$

Dal sistema ricaviamo $\dot{I}_1$ e $\dot{I}_2$, e scriviamo ora l'espressione della $\overline{V}_{AB}$ utilizzando la legge di Ohm generalizzata:

$$\dot{V}_{AB} + \dot{E}_{M13} + \dot{E}_{M23} = 0$$

$$\dot{V}_{AB} - j\omega M_{13}\dot{I}_1 - j\omega M_{23}\dot{I}_2 = 0$$

Da cui:

$$\dot{V}_{AB} = j\omega M_{13}\dot{I}_1 + j\omega M_{23}\dot{I}_2$$

Nota la $\dot{I}_2$, che scorre in $\overline{Z}_p$, utilizzando il partitore di corrente, ricaviamo:

$$\dot{I}_c = \dot{I}_2\frac{R_3}{R_3 + \overline{Z}_c}$$