Compito di Elettrotecnica

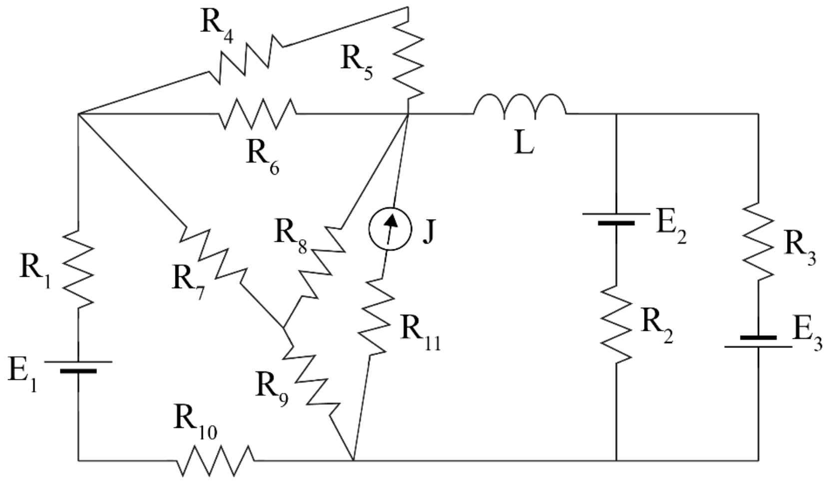
6 Febbraio 2025

Nome e Cognome ………………………………………………………….. Matricola……………………

Corso di Laurea………………………………………………..

ES.1 – Il circuito in figura è a regime. Si richiede di determinare l'energia immagazzinata nell'induttore L e la potenza dissipata sulla resistenza R_4.

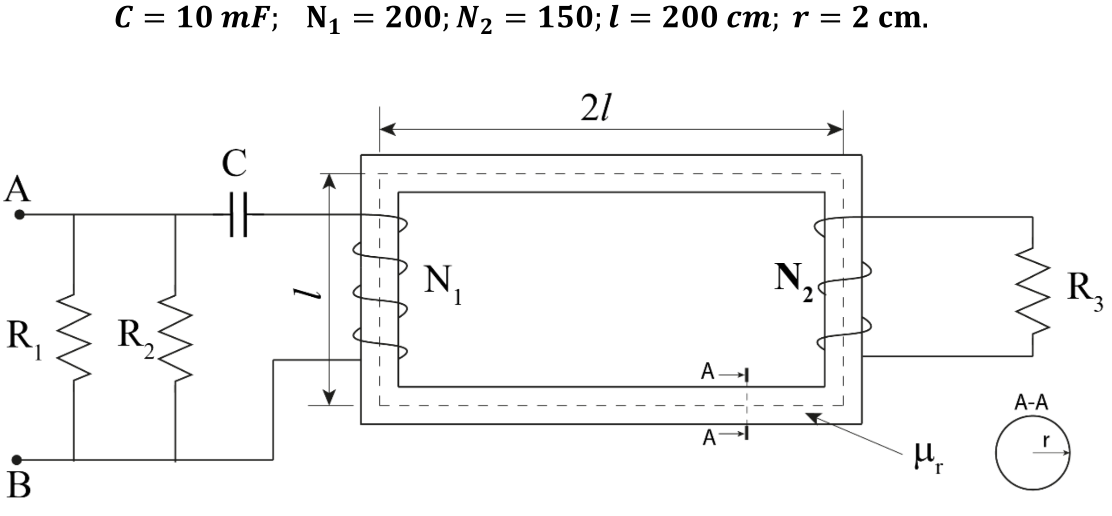
$$\mathbf{E_1 = 5\ V;\ E_2 = 3\ V;\ E_3 = 7\ V;\ J = 4\ A;\ R_1 = R_5 = 3\ \Omega;\ R_2 = R_6 = 4\ \Omega;\ R_3 = 5\ \Omega;}$$
$$\mathbf{R_4 = 6\ \Omega;\ R_7 = 7\ \Omega;\ R_8 = R_9 = 2\ \Omega;\ R_{10} = 8\ \Omega;\ R_{11} = 9\ \Omega;\ L = 0.2\ mH.}$$



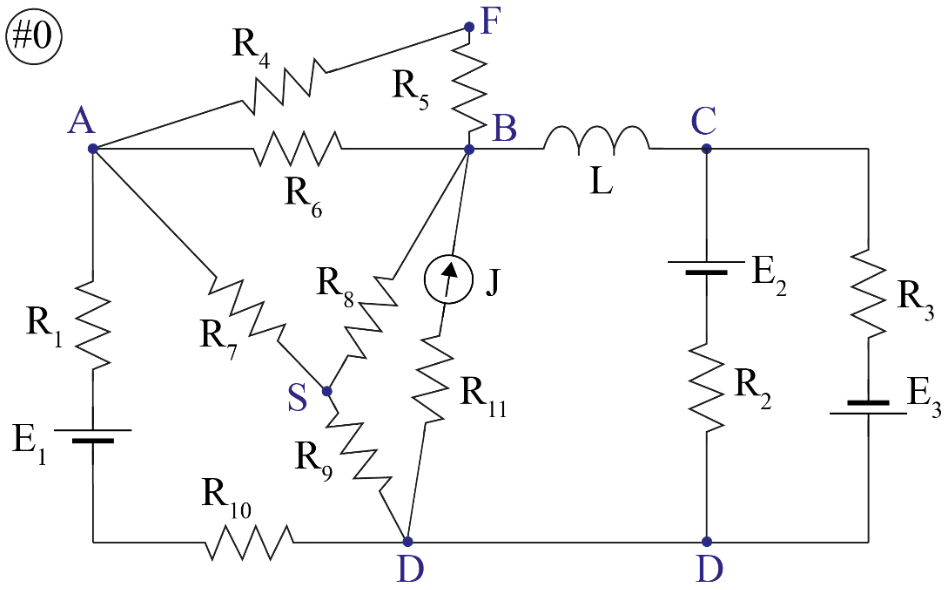
Energia L: __________
Potenza R_4: _________

ES.2 – Il sistema rappresentato è a regime. Si richiede di determinare la frequenza di risonanza (f_0) del sistema tra i punti A e B. Successivamente il sistema viene alimentato tra i punti A e B da un generatore di tensione reale $\boldsymbol{e(t) = 2\sqrt{2}\sin(2\pi f_0 t)\ V}$ e resistenza $\boldsymbol{R_0 = 2\ \Omega}$. Determinare il valore capacità da collegare tra i morsetti A e B per rifasare totalmente il carico a valle della sezione.

$$\boldsymbol{\mu_r = 1000;\ R_1 = 4\ \Omega;\ R_2 = 5\ \Omega;\ R_3 = 6\ \Omega;}$$
$$\boldsymbol{C = 10\ mF;\ N_1 = 200;\ N_2 = 150;\ l = 200\ cm;\ r = 2\ cm.}$$



Esercizio 1



Il sistema è a regime quindi l'induttore L si comporta da cortocircuito.
R_{11} è trascurabile perché in serie ad un generatore di corrente.
Collegamento serie tra R_1 e R_{10}.

$$R_{110} = R_1 + R_{10} = 11\ \Omega$$

Collegamento serie tra R_4 e R_5, in parallelo ad R_6.

$$R_{45-6} = \frac{1}{\frac{1}{R_4 + R_5} + \frac{1}{R_6}} = 2.77\ \Omega$$

Trasformo la stella $R_7 - R_8 - R_9$ con centro stella S, in triangolo con vertici i nodi A-B-D.

$$R_p = \frac{1}{\frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_9}} = 0.875\ \Omega$$

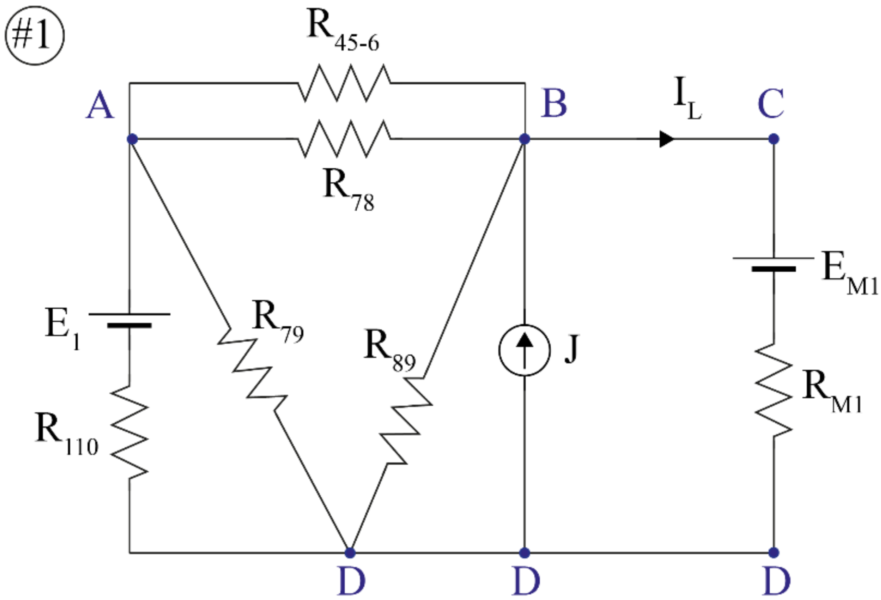
$$R_{78} = \frac{R_7 R_8}{R_p} = 16\ \Omega$$

$$R_{79} = \frac{R_7 R_9}{R_p} = 16\ \Omega$$

$$R_{89} = \frac{R_8 R_9}{R_p} = 4.57\ \Omega$$

Applico il teorema di Millman tra i nodi C e D:

$$E_{M1} = \frac{\frac{E_2}{R_2} - \frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = -1.44\ V \qquad R_{M1} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = 2.22\ \Omega$$



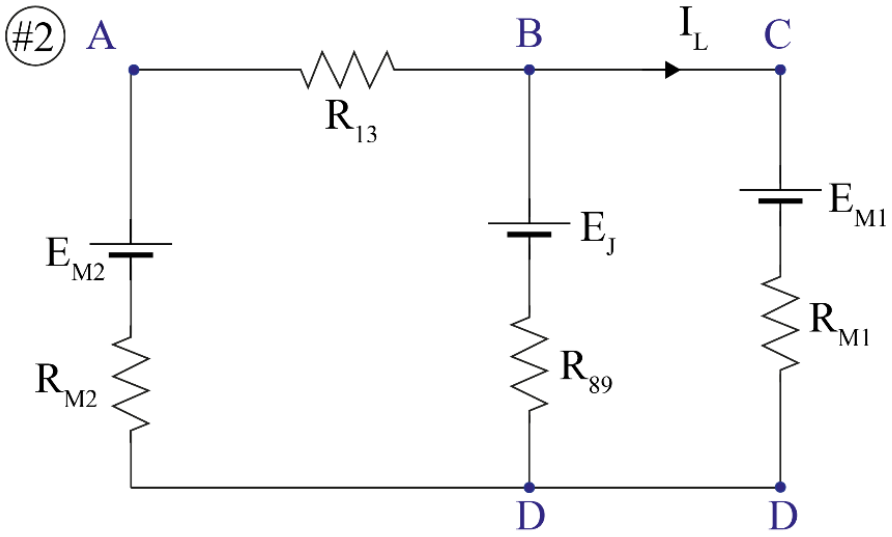
Collegamento in parallelo tra R_{45-6} e R_{78}.

$$R_{13} = \frac{1}{\frac{1}{R_{45-6}} + \frac{1}{R_{78}}} = 2.36\ \Omega$$

Applico il teorema di Millman tra i nodi A e D:

$$E_{M2} = \frac{\frac{E_1}{R_{110}}}{\frac{1}{R_{110}} + \frac{1}{R_{79}}} = 2.96\ V \qquad R_{M2} = \frac{1}{\frac{1}{R_{110}} + \frac{1}{R_{79}}} = 6.5\ \Omega$$

Trasformo il generatore reale di corrente in un generatore reale di tensione: $E_J = R_{89}J = 18.29\ V$ e resistenza serie R_{89}.



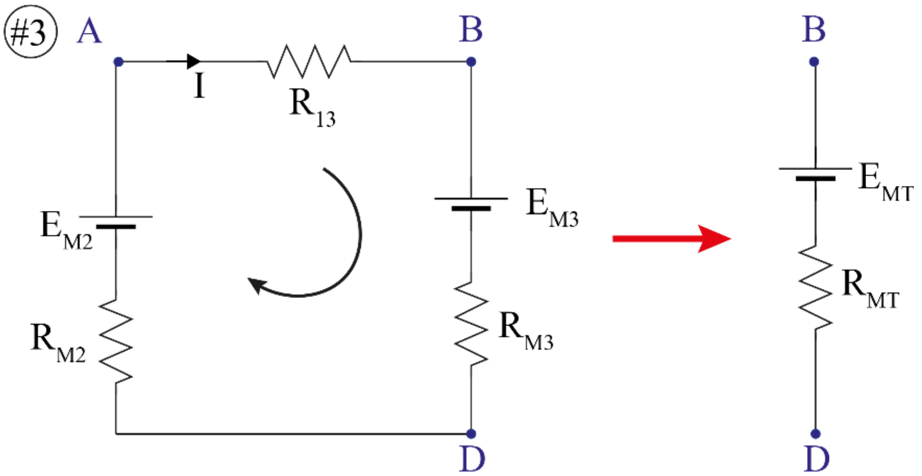
Applico il teorema di Millman a destra del circuito, tra i nodi B e D:

$$E_{M3} = \frac{\dfrac{E_J}{R_{89}} + \dfrac{E_{M_1}}{R_{M_1}}}{\dfrac{1}{R_{89}} + \dfrac{1}{R_{M_1}}} = 5.01\ V \qquad R_{M3} = \frac{1}{\dfrac{1}{R_{89}} + \dfrac{1}{R_{M_1}}} = 1.5\ \Omega$$

Collegamento serie tra R_{M_2} e R_{13}.

Applico il teorema di Millman tra i nodi B e D:

$$E_{MT} = \frac{\dfrac{E_{M_2}}{R_{M_2} + R_{13}} + \dfrac{E_{M_3}}{R_{M_3}}}{\dfrac{1}{R_{M_2} + R_{13}} + \dfrac{1}{R_{M_3}}} = 4.71\ V \qquad R_{MT} = \frac{1}{\dfrac{1}{R_{M_2} + R_{13}} + \dfrac{1}{R_{M_3}}} = 1.28\ \Omega$$



Da #3 la tensione $V_{BD} = E_{M_T}$. Applicando la legge di Ohm generalizzata tra i nodi B-D nel #2, calcolo la corrente I_L:

$$V_{BD} - E_{M_1} = R_{M_1} I_L$$

$$I_L = \frac{V_{BD} - E_{M_1}}{R_{M_1}} = 2.77\ A$$

L'energia immagazzinata nel induttore L è:

$$\varepsilon_L = \frac{1}{2} L I_L^2 = 2.77 \times 10^{-4}\ \mathrm{J}$$

La potenza dissipata sulla resistenza R_4 è $P_{R_4} = V_{AF} I_{R_4} = R_4 I_{R_4}^2 = \frac{V_{AF}^2}{R_4}$

Considero il circuito #3 e applico l'equazione alla maglia, percorrendo la maglia in senso orario:

$$E_{M_2} - E_3 = (R_{13} + R_{M_3} + R_{M_2}) I$$

$$I = \frac{R_{13} + R_{M_3} + R_{M_2}}{E_{M_2} - E_{M_3}} = -5.07\ A$$

Applicando la legge di Ohm:

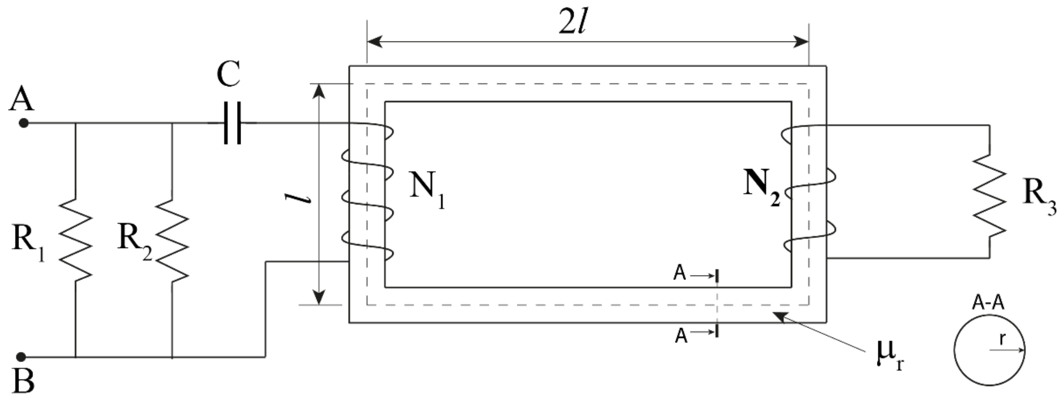
$$V_{AB} = R_{13} I = -11.97\ V$$

Considero il circuito #0 e utilizzando il partitore di tensione, ricavo:

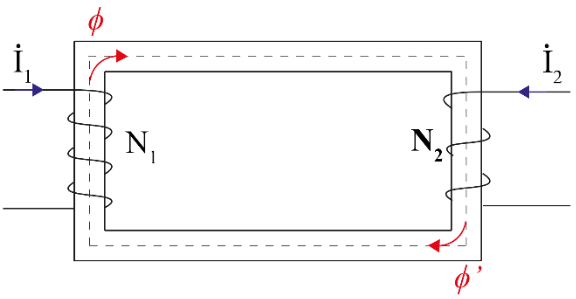
$$V_{AF} = V_{AB} \frac{R_4}{R_4 + R_5} = -7.98\ V$$

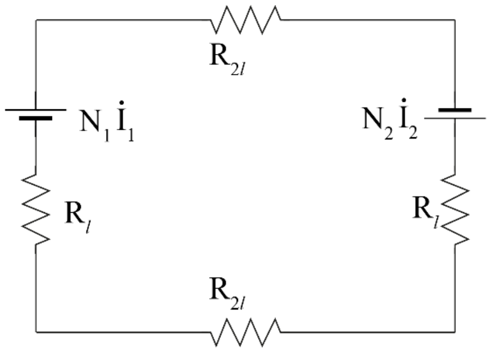
La potenza dissipata su R_4 è $P_{R_4} = 10.61\ W$.

Esercizio 2



Trasformiamo il circuito magnetico nell'equivalente elettrico:





La sezione è $S = \pi r^2 = 1.3 \times 10^3 \text{ m}^2$

Calcoliamo le riluttanze equivalenti:

$$R_l = \frac{l}{\mu_0 \mu_r S} = 1.27 \times 10^6 \text{ H}^{-1} \qquad R_{2l} = \frac{2l}{\mu_0 \mu_r S} = 2.53 \times 10^6 \text{ H}^{-1}$$

$$\mathcal{R}_{eq} = 2R_{2l} + 2R_l = 7.56 \times 10^6 \text{ H}^{-1}$$

Calcoliamo i coefficienti di auto induzione:

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}_{eq}} = 5.3 \times 10^3 \text{ H} \qquad L_2 = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}_{eq}} = 3 \times 10^3 \ H$$

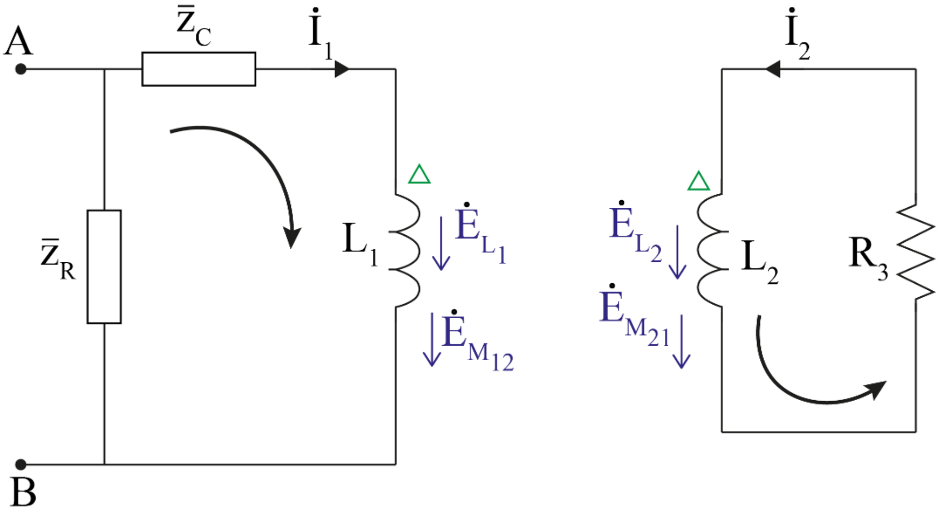
Calcoliamo i coefficienti di mutua induzione (tutte >0):

$$M_{12} = M_{21} = \sqrt{L_1 L_2} = 3.9 \times 10^3 \ H$$

Collegamento in parallelo tra R_1 e R_2.

$$\bar{Z}_R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = 2.22\ \Omega$$

Il circuito passando al dominio dei fasori diventa:



Dove

$$\bar{Z}_C = -\frac{j}{\omega C}$$

Calcoliamo le correnti $\dot{I}_1$ e $\dot{I}_2$ risolvendo il sistema costituito dalle equazioni alle due maglie (la maglia a sinistra è percorsa in senso orario, mentre quella a destra in senso antiorario):

$$\begin{cases} \dot{V}_{AB} + \dot{E}_{L_1} + \dot{E}_{M_{12}} = \bar{Z}_C\, \dot{I}_1 \\ \dot{E}_{L_2} + \dot{E}_{M_{21}} = R_3 \dot{I}_2 \end{cases}$$

Sostituendo le varie f.e.m. e tenendo presente che le mutue sono > 0 abbiamo:

$$\begin{cases} \dot{V}_{AB} - j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M_{12} \dot{I}_2 = -\frac{j}{\omega C} \dot{I}_1 & 1° \\ -j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M_{21} \dot{I}_1 = R_3 \dot{I}_2 & 2° \end{cases}$$

Dall'equazione 2°:

$$\dot{I}_2 = -\frac{j\omega M_{21} \dot{I}_1}{R_3 + j\omega L_2}$$

Sostituendo nell'equazione 1°:

$$\dot{V}_{AB} = \dot{I}_1 \left(j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M_{12}^2}{R_3 + j\omega L_2} - \frac{j}{\omega C} \right)$$

Sapendo che $\dot{V}_{AB} = \dot{I}_1 \bar{Z}_0$ l'impedenza ai capi di A-B è:

$$\bar{Z}_0 = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M_{12}^2}{R_3 + j\omega L_2} - \frac{j}{\omega C}$$

Consideriamo:

$$\bar{Z}_0 = \frac{\omega^2 M_{12}^2 R_3}{R_3^2 + \omega^2 L_2^2} + j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C} - \frac{\omega^3 M_{12}^2 L_2}{R_3^2 + \omega^2 L_2^2}\right) = Re\{\bar{Z}_0\} + j\, Im\{\bar{Z}_0\}$$

Per determinare la frequenza di risonanza annulliamo la parte immaginaria dell'impedenza $\bar{Z}_0$.

$$\omega L_1 - \frac{1}{\omega C} - \frac{\omega^3 M_{12}^2 L_2}{R_3^2 + \omega^2 L_2^2} = 0$$

$$\frac{(R_3^2 + \omega^2 L_2^2)\omega^2 L_1 C - (R_3^2 + \omega^2 L_2^2) - \omega^4 M_{12}^2 L_2 C}{(R_3^2 + \omega^2 L_2^2)\omega C} = 0$$

$$\frac{\omega^2 L_1 C R_3^2 + \omega^4 L_2^2 L_1 C - R_3^2 - \omega^2 L_2^2 - \omega^4 M_{12}^2 L_2 C}{(R_3^2 + \omega^2 L_2^2)\omega C} = 0$$

$$\omega^4 (L_2^2 L_1 C - M_{12}^2 L_2 C) + \omega^2 (L_1 C R_3^2 - L_2^2) - R_3^2 = 0$$

$$A\,\omega^4 + B\omega^2 + C = 0$$

Dove:

$A = L_2^2 L_1 C - M_{12}^2 L_2 C$
$B = L_1 C R_3^2 - L_2^2$
$C = -R_3^2$

Le soluzioni sono:

$$\omega = 0$$

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}}$$

Consideriamo solo le soluzioni positive e non banali:

$$\omega = 1.9 \times 10^{11}$$

Quindi la frequenza di risonanza è:

$$f_0 = \frac{\omega}{2\pi} = 3.04 \times 10^{10}\ Hz$$

Poiché il generatore lavora alla frequenza di risonanza f_0, il carico appare puramente resistivo, rendendo superflua qualsiasi operazione di rifasamento.