

## Compito di Elettrotecnica

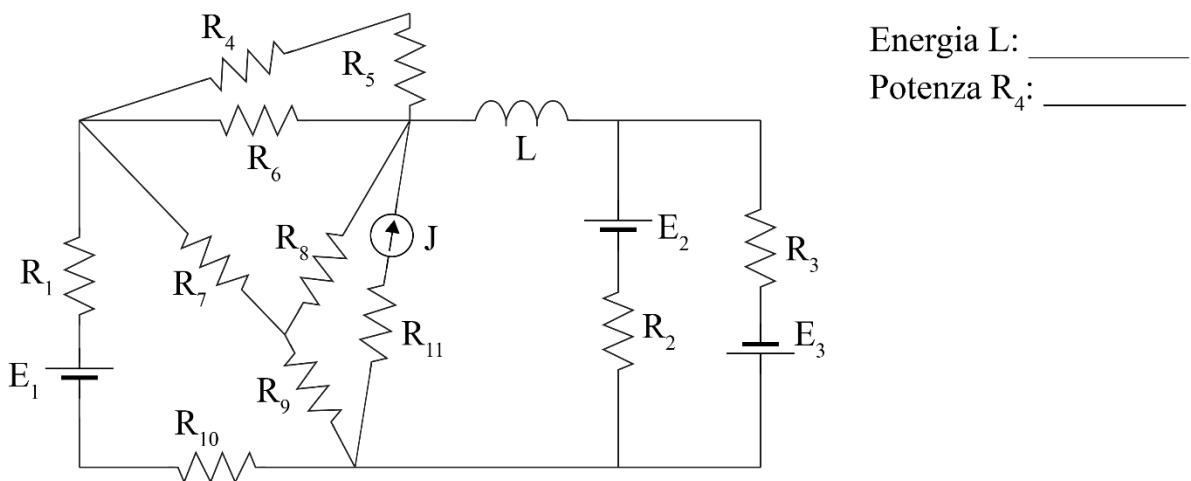
**6 Febbraio 2025**

**Nome e Cognome .....** **Matricola.....**

## Corso di Laurea.....

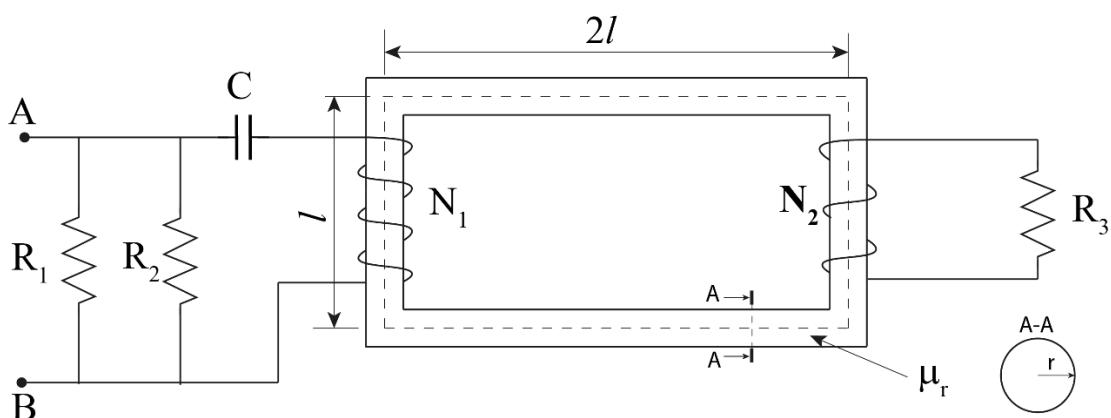
**ES.1** – Il circuito in figura è a regime. Si richiede di determinare l'energia immagazzinata nell'induttore  $L$  e la potenza dissipata sulla resistenza  $R_4$ .

$$E_1 = 5 \text{ V}; E_2 = 3 \text{ V}; E_3 = 7 \text{ V}; J = 4 \text{ A}; R_1 = R_5 = 3 \Omega; R_2 = R_6 = 4 \Omega; R_3 = 5 \Omega; R_4 = 6 \Omega; R_7 = 7 \Omega; R_8 = R_9 = 2 \Omega; R_{10} = 8 \Omega; R_{11} = 9 \Omega; L = 0.2 \text{ mH}.$$

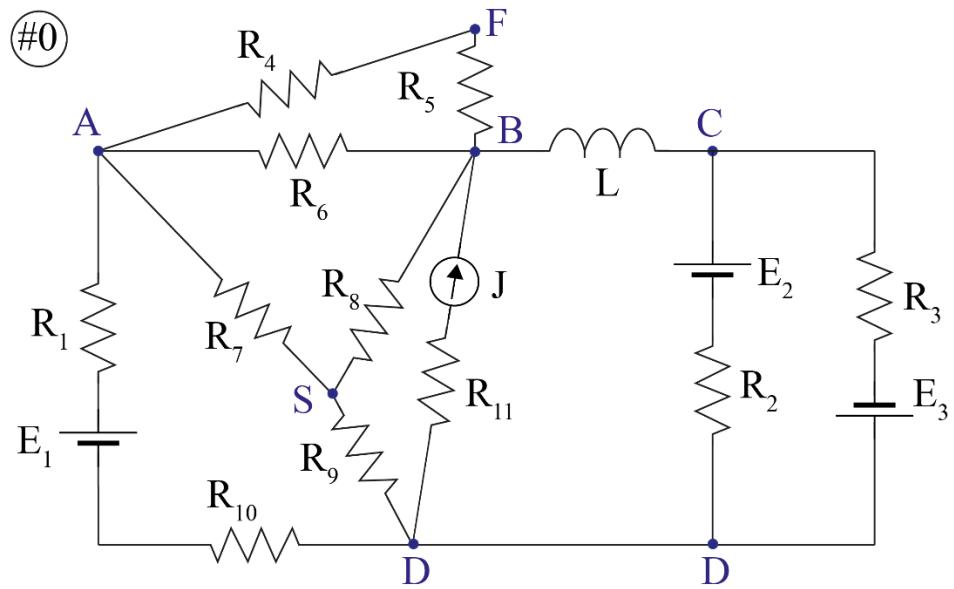


**ES.2** – Il sistema rappresentato è a regime. Si richiede di determinare la frequenza di risonanza ( $f_0$ ) del sistema tra i punti A e B. Successivamente il sistema viene alimentato tra i punti A e B da un generatore di tensione reale  $e(t) = 2\sqrt{2} \sin(2\pi f_0 t)$  V e resistenza  $R_0 = 2 \Omega$ . Determinare il valore capacità da collegare tra i morsetti A e B per rifasare totalmente il carico a valle della sezione.

$$\mu_r = 1000; R_1 = 4 \Omega; R_2 = 5 \Omega; R_3 = 6 \Omega; \\ C = 10 \text{ mF}; N_1 = 200; N_2 = 150; l = 200 \text{ cm}; r = 2 \text{ cm}.$$



## Esercizio 1



Il sistema è a regime quindi l'induttore L si comporta da cortocircuito.

$R_{11}$  è trascurabile perché in serie ad un generatore di corrente.

Collegamento serie tra  $R_1$  e  $R_{10}$ .

$$R_{110} = R_1 + R_{10} = 11 \Omega$$

Collegamento serie tra  $R_4$  e  $R_5$ , in parallelo ad  $R_6$ .

$$R_{45-6} = \frac{1}{\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}} = 2.77 \Omega$$

Trasformo la stella  $R_7 - R_8 - R_9$  con centro stella S, in triangolo con vertici i nodi A-B-D.

$$R_p = \frac{1}{\frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_9}} = 0.875 \Omega$$

$$R_{78} = \frac{R_7 R_8}{R_p} = 16 \Omega$$

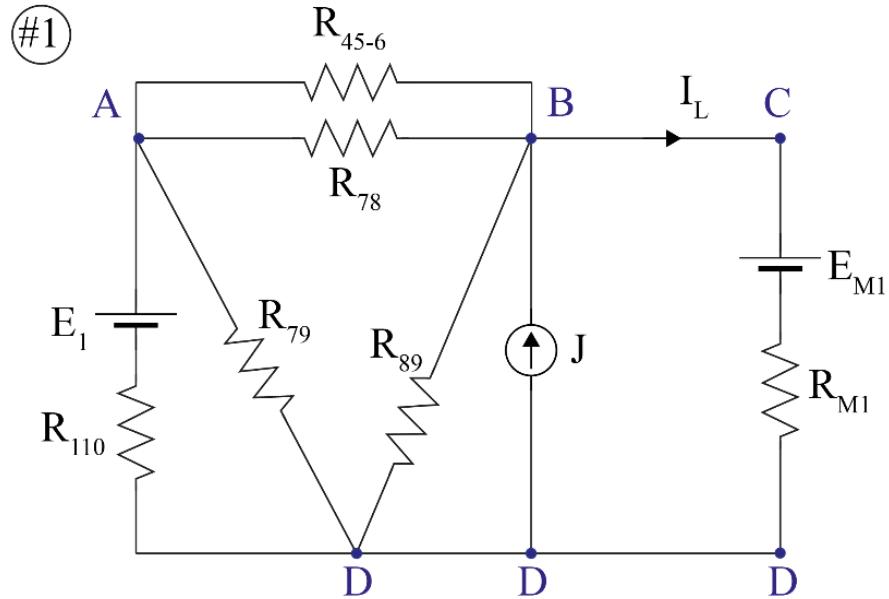
$$R_{79} = \frac{R_7 R_9}{R_p} = 16 \Omega$$

$$R_{89} = \frac{R_8 R_9}{R_p} = 4.57 \Omega$$

Applico il teorema di Millman tra i nodi C e D:

$$E_{M1} = \frac{\frac{E_2}{R_2} - \frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = -1.44 \text{ V}$$

$$R_{M1} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = 2.22 \Omega$$



Collegamento in parallelo tra  $R_{45-6}$  e  $R_{78}$ .

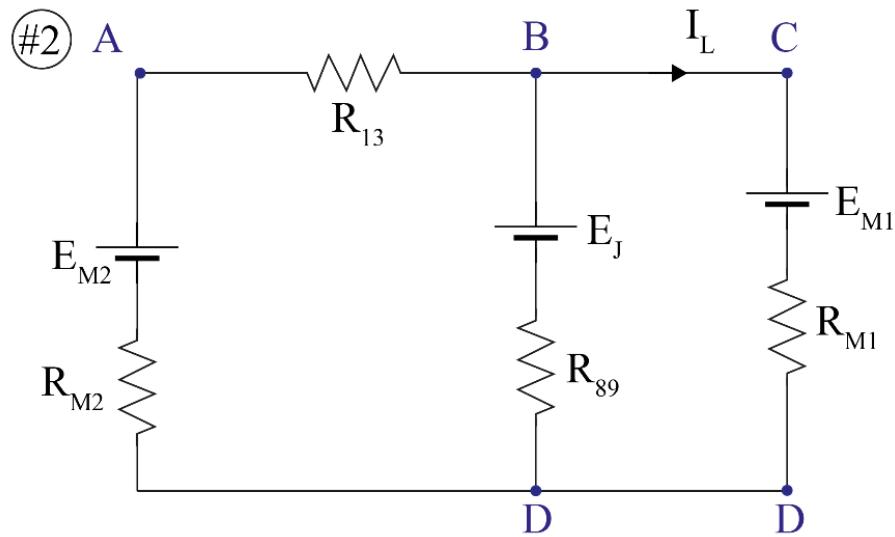
$$R_{13} = \frac{1}{\frac{1}{R_{45-6}} + \frac{1}{R_{78}}} = 2.36 \Omega$$

Applico il teorema di Millman tra i nodi A e D:

$$E_{M2} = \frac{\frac{E_1}{R_{110}}}{\frac{1}{R_{110}} + \frac{1}{R_{79}}} = 2.96 \text{ V}$$

$$R_{M2} = \frac{1}{\frac{1}{R_{110}} + \frac{1}{R_{79}}} = 6.5 \Omega$$

Trasformo il generatore reale di corrente in un generatore reale di tensione:  $E_J = R_{89}J = 18.29 \text{ V}$  e resistenza serie  $R_{89}$ .



Applico il teorema di Millman a destra del circuito, tra i nodi B e D:

$$E_{M3} = \frac{\frac{E_J}{R_{89}} + \frac{E_{M1}}{R_{M1}}}{\frac{1}{R_{89}} + \frac{1}{R_{M1}}} = 5.01 V$$

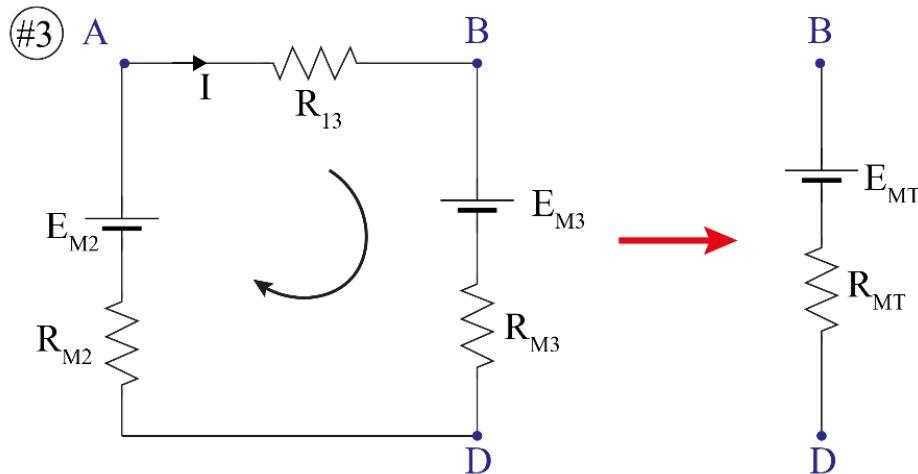
$$R_{M3} = \frac{1}{\frac{1}{R_{89}} + \frac{1}{R_{M1}}} = 1.5 \Omega$$

Collegamento serie tra  $R_{M2}$  e  $R_{13}$ .

Applico il teorema di Millman tra i nodi B e D:

$$E_{MT} = \frac{\frac{E_{M2}}{R_{M2} + R_{13}} + \frac{E_{M3}}{R_{M3}}}{\frac{1}{R_{M2} + R_{13}} + \frac{1}{R_{M3}}} = 4.71 V$$

$$R_{MT} = \frac{1}{\frac{1}{R_{M2} + R_{13}} + \frac{1}{R_{M3}}} = 1.28 \Omega$$



Da #3 la tensione  $V_{BD} = E_{M_T}$ . Applicando la legge di Ohm generalizzata tra i nodi B-D nel #2, calcolo la corrente  $I_L$ :

$$V_{BD} - E_{M_1} = R_{M_1} I_L$$

$$I_L = \frac{V_{BD} - E_{M_1}}{R_{M_1}} = 2.77 \text{ A}$$

L'energia immagazzinata nel induttore L è:

$$\varepsilon_L = \frac{1}{2} L I_L^2 = 2.77 \times 10^{-4} \text{ J}$$

La potenza dissipata sulla resistenza  $R_4$  è  $P_{R_4} = V_{AF} I_{R_4} = R_4 I_{R_4}^2 = \frac{V_{AF}^2}{R_4}$

Considero il circuito #3 e applico l'equazione alla maglia, percorrendo la maglia in senso orario:

$$E_{M_2} - E_{M_3} = (R_{13} + R_{M_3} + R_{M_2}) I$$

$$I = \frac{E_{M_2} - E_{M_3}}{R_{13} + R_{M_3} + R_{M_2}} = -5.07 \text{ A}$$

Applicando la legge di Ohm:

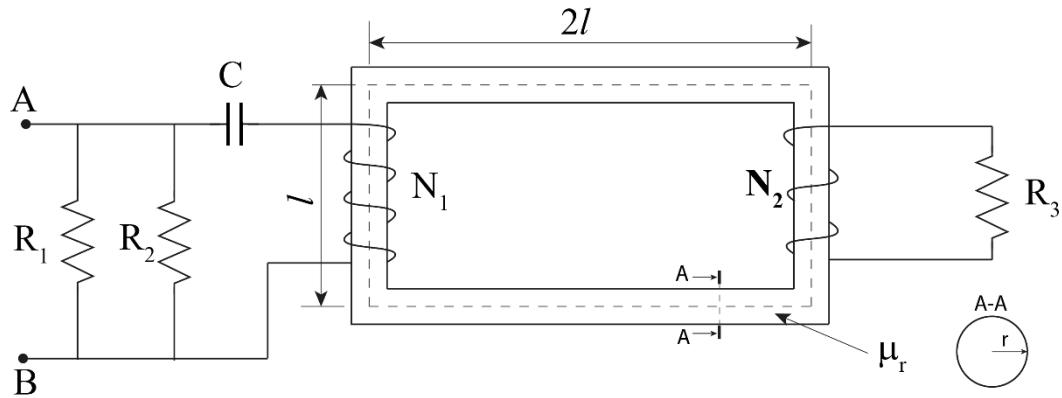
$$V_{AB} = R_{13} I = -11.97 \text{ V}$$

Considero il circuito #0 e utilizzando il partitore di tensione, ricavo:

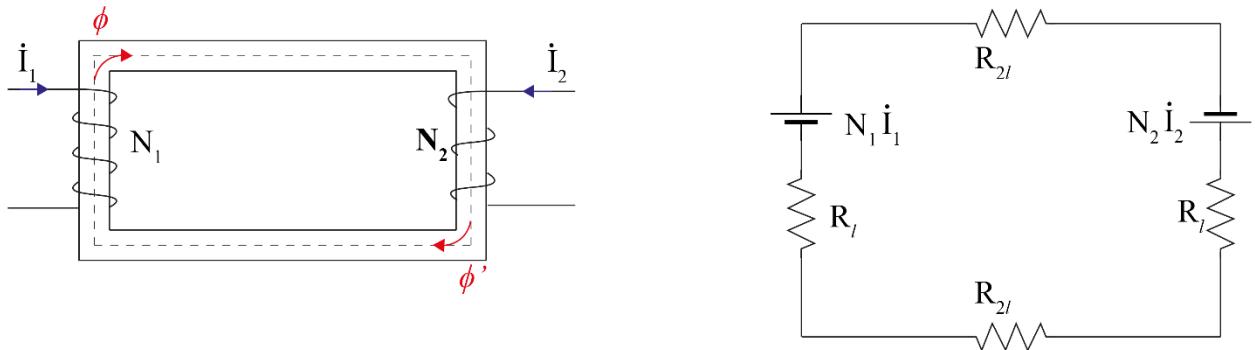
$$V_{AF} = V_{AB} \frac{R_4}{R_4 + R_5} = -7.98 \text{ V}$$

La potenza dissipata su  $R_4$  è  $P_{R_4} = 10.61 \text{ W}$ .

## Esercizio 2



Trasformiamo il circuito magnetico nell'equivalente elettrico:



$$\text{La sezione è } S = \pi r^2 = 1.3 \times 10^3 \text{ m}^2$$

Calcoliamo le riluttanze equivalenti:

$$R_l = \frac{l}{\mu_0 \mu_r S} = 1.27 \times 10^6 \text{ H}^{-1} \quad R_{2l} = \frac{2l}{\mu_0 \mu_r S} = 2.53 \times 10^6 \text{ H}^{-1}$$

$$\mathcal{R}_{eq} = 2R_{2l} + 2R_l = 7.56 \times 10^6 \text{ H}^{-1}$$

Calcoliamo i coefficienti di auto induzione:

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}_{eq}} = 5.3 \times 10^3 \text{ H} \quad L_2 = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}_{eq}} = 3 \times 10^3 \text{ H}$$

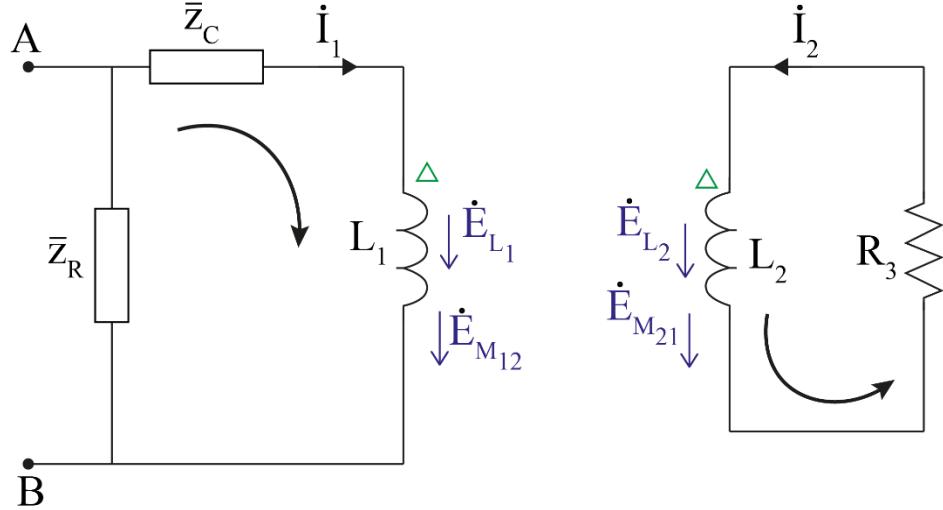
Calcoliamo i coefficienti di mutua induzione (tutte >0):

$$M_{12} = M_{21} = \sqrt{L_1 L_2} = 3.9 \times 10^3 \text{ H}$$

Collegamento in parallelo tra  $R_1$  e  $R_2$ .

$$\bar{Z}_R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = 2.22 \Omega$$

Il circuito passando al dominio dei fasori diventa:



Dove

$$\bar{Z}_C = -\frac{j}{\omega C}$$

Calcoliamo le correnti  $\dot{I}_1$  e  $\dot{I}_2$  risolvendo il sistema costituito dalle equazioni alle due maglie (la maglia a sinistra è percorsa in senso orario, mentre quella a destra in senso antiorario):

$$\begin{cases} \dot{V}_{AB} + \dot{E}_{L_1} + \dot{E}_{M_{12}} = \bar{Z}_C \dot{I}_1 \\ \dot{E}_{L_2} + \dot{E}_{M_{21}} = R_3 \dot{I}_2 \end{cases}$$

Sostituendo le varie f.e.m. e tenendo presente che le mutue sono  $> 0$  abbiamo:

$$\begin{cases} \dot{V}_{AB} - j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M_{12} \dot{I}_2 = -\frac{j}{\omega C} \dot{I}_1 & 1^\circ \\ -j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M_{21} \dot{I}_1 = R_3 \dot{I}_2 & 2^\circ \end{cases}$$

Dall'equazione 2°:

$$\dot{I}_2 = -\frac{j\omega M_{21} \dot{I}_1}{R_3 + j\omega L_2}$$

Sostituendo nell'equazione 1°:

$$\dot{V}_{AB} = \dot{I}_1 \left( j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M_{12}^2}{R_3 + j\omega L_2} - \frac{j}{\omega C} \right)$$

Sapendo che  $\dot{V}_{AB} = \dot{I}_1 \bar{Z}_0$  l'impedenza ai capi di A-B è:

$$\bar{Z}_0 = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M_{12}^2}{R_3 + j\omega L_2} - \frac{j}{\omega C}$$

Consideriamo:

$$\bar{Z}_0 = \frac{\omega^2 M_{12}^2 R_3}{R_3^2 + \omega^2 L_2^2} + j \left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C} - \frac{\omega^3 M_{12}^2 L_2}{R_3^2 + \omega^2 L_2^2} \right) = \operatorname{Re}\{\bar{Z}_0\} + j \operatorname{Im}\{\bar{Z}_0\}$$

Per determinare la frequenza di risonanza annulliamo la parte immaginaria dell'impedenza  $\bar{Z}_0$ .

$$\omega L_1 - \frac{1}{\omega C} - \frac{\omega^3 M_{12}^2 L_2}{R_3^2 + \omega^2 L_2^2} = 0$$

$$\frac{(R_3^2 + \omega^2 L_2^2) \omega^2 L_1 C - (R_3^2 + \omega^2 L_2^2) - \omega^4 M_{12}^2 L_2 C}{(R_3^2 + \omega^2 L_2^2) \omega C} = 0$$

$$\frac{\omega^2 L_1 C R_3^2 + \omega^4 L_2^2 L_1 C - R_3^2 - \omega^2 L_2^2 - \omega^4 M_{12}^2 L_2 C}{(R_3^2 + \omega^2 L_2^2) \omega C} = 0$$

$$\omega^4 (L_2^2 L_1 C - M_{12}^2 L_2 C) + \omega^2 (L_1 C R_3^2 - L_2^2) - R_3^2 = 0$$

$$A \omega^4 + B \omega^2 + C = 0$$

Dove:

$$A = L_2^2 L_1 C - M_{12}^2 L_2 C$$

$$B = L_1 C R_3^2 - L_2^2$$

$$C = -R_3^2$$

Le soluzioni sono:

$$\omega = 0$$

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}}$$

Consideriamo solo le soluzioni positive e non banali:

$$\omega = 1.9 \times 10^{11}$$

Quindi la frequenza di risonanza è:

$$f_0 = \frac{\omega}{2\pi} = 3.04 \times 10^{10} \text{ Hz}$$

Poiché il generatore lavora alla frequenza di risonanza  $f_0$ , il carico appare puramente resistivo, rendendo superflua qualsiasi operazione di rifasamento.

