UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MESSINA
Dipartimento di Ingegneria
Contrada Di Dio I, 98166 – Villaggio S. Agata Messina

Appunti Corso di Elettrotecnica

Il circuito elettrico in regime sinusoidale

Anno Accademico 2023-2024

prof. ing. Bruno Azzerboni

Fonti:
Lezioni di Elettrotecnica Generale *- Giulio Battistini*
Colombo Cursi Pisa

L'equilibrio elettrico nei circuiti a corrente variabile

Allorché una tensione alternata (o comunque variabile nel tempo) viene applicata ad un circuito. le cariche elettriche acquistano un moto variabile nel tempo in intensità e senso[1], dando luogo ad una corrente elettrica alternata.

Per determinare la legge di variazione della corrente che percorre il circuito, è necessario individuare preventivamente quali sono, oltre la tensione, i parametri che concorrono alla sua determinazione.

Nei circuiti a corrente continua, l'intensità della corrente di regime è determinata esclusivamente dall'intensità della tensione e dal valore della resistenza ohmica del circuito. Nei circuiti a corrente alternata invece, dove la corrente è in continua variazione, il campo magnetico creato nello spazio attorno al circuito, genera in questo in ogni istante una f. e. m. di autoinduzione e_L, che, riferita al senso della corrente, è espressa da:

$$e_L = -\frac{d\phi_\Sigma}{dt}$$

Se nello spazio intorno al circuito, dove si svolge il flusso di autoinduzione, non vi sono materiali ferromagnetici, l'induttanza del circuito $L = {}^{\phi_\Sigma}/_{i}$ è costante la f.e.m. d'autoinduzione è allora.:

$$e_L = -L\frac{di}{dt}$$

La f.e.m. e_L si compone coi valori istantanei delle altre f.e.m. operanti nel circuito, dando luogo ad una risultante che, in definitiva, è la f. e. m. che in quell'istante agisce nel circuito e sollecita le cariche a muoversi.

Pertanto, *nei circuiti a corrente variabile, l'induttanza L è un parametro determinante del regime elettrico del circuito*.

Anche la capacità esistente nel circuito concorre alla determinazione del suo regime elettrico.

Sappiamo che un condensatore inserito in serie in un circuito alimentato con una tensione continua di valore costante, non consente, a regime, il passaggio di una corrente elettrica. Nei periodi transitori invece, durante i quali, per effetto di variazioni della tensione, si verificano i fenomeni di carica o di scarica del condensatore, il circuito è percorso rispettivamente dalle correnti di carica o di scarica.

Nei circuiti a corrente alternata (o comunque variabile), dove la tensione è permanentemente in variazione, il condensatore è assoggettato con continuità ad un regime di successive cariche e scariche ed il circuito è perciò permanentemente percorso da una corrente alternata, formata dalla successione delle correnti di carica e di scarica del condensatore.

Se q è la carica presente all'istante generico sulle armature del condensatore ($q = \int idt$), la tensione v_C esistente in quello stesso istante fra le armature, riferita al senso della corrente, è espressa da:

$$v_C = -\frac{q}{C} = -\int \frac{i}{C}dt$$

Anche la tensione v_C si compone con i valori istantanei delle altre f.e.m. operanti nel circuito, dando luogo alla risultante che agisce complessivamente nel circuito. Quindi, *nei circuiti a corrente variabile, anche la capacità è un parametro determinante del regime elettrico del circuito*.

Si può pertanto concludere che il regime elettrico di un circuito a corrente variabile isolato (ossia che non interagisce con altri circuiti), è determinato, oltre che dalla tensione applicata v, dai tre parametri del circuito*: resistenza* (R)*, induttanza* (L) *e capacità* (C). L'equilibrio elettrico in un circuito a corrente comunque variabile, si esprime dunque, istante per istante, applicando al circuito la legge alle maglie.

Quindi in un circuito isolato contenente una resistenza R, una induttanza L ed una capacità C, collegate in serie e alimentato con una tensione variabile v, dovrà essere verificata in ogni istante l'uguaglianza:

$$v + e_L - v_c = Ri$$

o, anche:

$$v - \frac{d\phi_\Sigma}{dt} + \int \frac{i}{C}dt = Ri$$

[1] Il senso della corrente non muta. invece, quando nel circuito, alimentato a tensione alternata, sono inseriti apparecchi che consentono solo il moto unidirezionale delle cariche (semiconduttori, raddrizzatori., tubi termoionici. ecc).

Tale equazione esprime, *istante per istante, l'equilibrio elettrico del circuito isolato*[2] *, nella forma più generale possibile*. Infatti, non essendo stata formulata alcuna ipotesi sulla legge di variazione nel tempo di v e di i*, l'equazione è valevole per tensioni e correnti comunque variabili, anche non sinusoidali e non periodiche*.
Inoltre, non essendo stata imposta alcuna preliminare condizion e in merito alla localizzazione dei fenomeni fisici nell'una o nell'altra parte del circuito, *l'equazione è valida qualunque sia la distribuzione nel circuito, dei parametri che ne determinano il regime*.
Infine, non essendo stata formulata alcuna ipotesi sui parametri R, L e C, *l'equazione è applicabile anche ai circuiti con parametri variabili (circuiti non lineari).*
Se invece R, L e C sono costanti, l'equazione dell'equilibrio del circuito isolato assume la forma:

$$v - L\frac{di}{dt} - \frac{1}{C}\int idt = Ri$$

od anche, derivando rispetto al tempo:

$$\frac{dv}{dt} = L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C}$$

L'equilibrio elettrico nei circuiti in regime sinusoidale

Consideriamo un circuito isolato contenente una resistenza R, un'induttanza L ed una capacità C e supponiamo che tali parametri siano rigorosamente costanti.
Tale regime risulta determinato unicamente dalla tensione applicata al circuito e dai tre parametri costanti R, L e C.
Se applichiamo al circuito una tensione sinusoidale, la corrente che percorre il circuito, negli istanti immediatamente successivi all'applicazione della tensione, assume un andamento particolare *che non è sinusoidale e nemmeno periodica*.
Tale andamento tuttavia, negli istanti successivi va avvicinandosi gradualmente ad una legge sinusoidale isofrequenziale con la tensione, sulla quale infine si stabilizza dopo un periodo dì tempo (*periodo transitorio*) teoricamente infinito, ma che in effetti è praticamente finito e determinato dai parametri costanti del circuito.
In questa fase, prescinderemo dal periodo transitorio e ci limiteremo ad esaminare i fenomeni che si verificano nel circuito quando esso *ha già raggiunto la condizione di regime stabile (regime permanente) e la corrente ha acquistato un permanente andamento sinusoidale*.
Indichiamo con v ed i i valori istantanei della tensione e del circuito a regime.
Quindi, se φ è la differenza angolare di fase fra la tensione e la corrente, le due grandezze possono essere rappresentate dalle espressioni algebriche:

$$\begin{cases} v = V_M \sin(\omega t + \varphi) \\ i = I_M \sin \omega t \end{cases}$$

Onde evitare ogni dubbio sulla interpretazione del segno di φ, manterremo costantemente la convenzione adesso formulata: pertanto *indicheremo sempre come angolo di fase φ fra la tensione e la corrente di un circuito, in grandezza e segno, l'angolo di fase della tensione rispetto alla corrente*. È ovvio allora che l'angolo di fase della corrente rispetto alla tensione è sempre uguale a φ cambiato di segno.

[2] Nel caso invece che il circuito sia soggetto all'azione anche di un flusso variabile $\phi_{\Sigma e}$, prodotto da uno o più circuiti esterni (mutuamente accoppiati con il circuito in esame), indicando con$\phi_{\Sigma t}$ la somma algebrica. istante per istante, del flusso totale $(\phi_{\Sigma t} = \phi_{\Sigma} + \phi_{\Sigma e})$, l'equazione dell'equilibrio del circuito diviene ovviamente:

$$v - \frac{d\phi_{\Sigma \mathrm{t}}}{dt} + \int \frac{i}{C} dt = Ri$$

Le due grandezze v ed i, nei limiti di validità della rappresentazione polare, possono dunque essere rappresentate dai vettori:

$$\begin{cases} \dot{V} = V_M e^{j(\omega t+\varphi)} \\ \dot{I} = I_M e^{j\omega t} \end{cases}$$

E poiché l'equazione dell'equilibrio elettrico del circuito comporta operazioni matematiche compatibili con la rappresentazione polare delle grandezze sinusoidali, la condizione di equilibrio si può scrivere anche nella forma:

$$\dot{V} - L\frac{d\dot{I}}{dt} - \frac{1}{C}\int \dot{I}dt = R\dot{I}$$

Eseguendo le operazioni di derivazione e di integrazione, si ottiene allora:

$$\dot{V} - j\omega L\dot{I} + \frac{j}{\omega C}\dot{I} = R\dot{I}$$

da cui si deduce:

$$\dot{V} = \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]\dot{I}$$

Il coefficiente di $\dot{I}$ è un *numero complesso costante che, moltiplicato della corrente, dà per risultato il simbolo complesso della tensione*.
Esso è quindi un operatore complesso e viene comunemente denominato *operatore d'impedenza* ($\bar{Z}$).

$$\bar{Z} = \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]$$

La legge dell'equilibrio elettrico del circuito può pertanto essere espressa sinteticamente mediante la relazione simbolica:

$$\dot{V} = \bar{Z}\dot{I}$$

dalla quale si rileva che *in un circuito in regime sinusoidale, la relazione fra la tensione e la corrente può essere espressa in una forma analoga a quella della legge di Ohm, purché la tensione e la corrente siano rappresentate dai loro simboli complessi $\dot{V}$ ed $\dot{I}$ e la costante di proporzionalità sia l'operatore di impedenza $\bar{Z}$* (fig. 1).

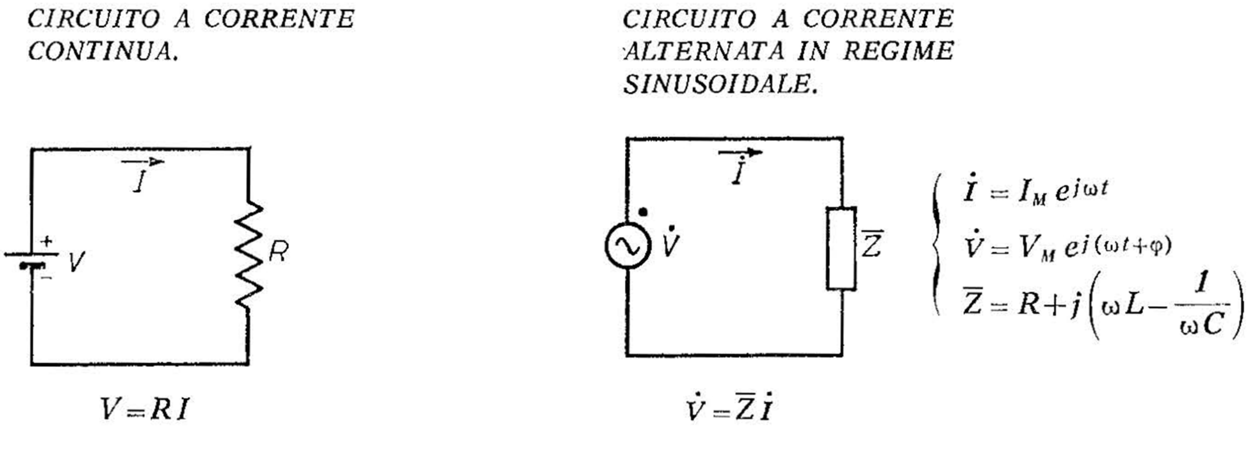


Fig. 1 – La legge dell'equilibrio elettrico nei circuiti

È opportuno rilevare che, essendo $\bar{Z}$ una grandezza che dipende da ω, la relazione fra tensione e corrente nei circuiti a corrente alternata, varia al variare della frequenza.

Le grandezze caratteristiche del circuito in regime sinusoidale
Il modulo dell'operatore complesso d'impedenza $\bar{Z}$ si chiama normalmente impedenza del circuito e si indica con Z:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Il coefficiente della parte immaginaria di Z viene invece denominato *reattanza* del circuito ed è indicato con X:

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

L'impedenza e la reattanza hanno le dimensioni fisiche di una resistenza e perciò vengono misurate in Ohm.
Le espressioni dell'operatore di impedenza e della impedenza del circuito possono quindi essere scritte nella forma più sintetica:

$$\begin{cases} \bar{Z} = R + jX \\ Z = \sqrt{R^2 + X^2} \end{cases}$$

L'operatore di impedenza $\bar{Z}$ nella sua forma esponenziale è allora:

$$\bar{Z} = Ze^{j\varphi}$$

dove:

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{X}{R} = \tan^{-1}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

L'angolo $\tan^{-1}(X/R)$ si chiama comunemente *angolo caratteristico dell'impedenza*; esso coincide ovviamente, in grandezza e segno, con l'angolo di fase φ fra la tensione ai capi dell'impedenza e la corrente da cui questa è percorsa.
Dall'equazione dell'equilibrio del circuito $\dot{V} = \bar{Z}\dot{I}$ (diagramma polare della fig. 2a), si deduce allora che:

- *Il vettore rappresentativo della tensione si ricava dal vettore rappresentativo della corrente, ruotandolo dell'angolo φ (in anticipo, se φ è positivo; in ritardo se φ è negativo) e moltiplicandone la lunghezza per l'impedenza Z.*

- *Il vettore rappresentativo della corrente si ricava dal vettore rappresentativo della tensione, ruotandolo dell'angolo φ (in ritardo, se φ è positivo; in anticipo se φ è negativo) e dividendone la lunghezza per l'impedenza Z.*

Pertanto, se V è il valore efficace di una tensione sinusoidale applicata ad un circuito comprendente R, L e C costanti, il valore efficace I della corrente e l'angolo di fase φ fra la tensione e la corrente, in regime permanente sinusoidale del circuito, sono dati rispettivamente dalle relazioni:

$$\begin{cases} I = \dfrac{V}{Z} = \dfrac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \\ \tan\varphi = \dfrac{X}{R} = \dfrac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \end{cases}$$

Concludendo, se $i = I_M \sin \omega t$ è la corrente che percorre il circuito, la tensione ad esso applicata varia nel tempo con la legge:

$$v = ZI_M \sin\left(\omega t + \tan^{-1}\frac{X}{R}\right)$$

Reciprocamente, se $v = V_M \sin \omega t$ è la tensione applicata, la corrente che si stabilisce nel circuito a regime è:

$$i = \frac{V_M}{Z}\sin\left(\omega t - \tan^{-1}\frac{X}{R}\right)$$

Dei due addendi che costituiscono la reattanza $\left(X = \omega L - {}^{1}\!/_{\omega C}\right)$, il primo si chiama *reattanza induttiva* (X_L), il secondo reattanza capacitiva (X_C); per un circuito RLC serie, si ha:

$$X_L = \omega L \qquad\qquad X_C = {}^{1}\!/_{\omega C}$$

$$X = X_L - X_C$$

Se $X_L > X_C$, la reattanza complessiva X del circuito è positiva; l'angolo di fase $\varphi = \tan^{-1} {}^{(X_L - X_C)}\!/_{R}$, fra la tensione e la corrente è positivo e la tensione è in anticipo sulla corrente; il circuito si dice *induttivo*.
Se, al contrario, $X_L < X_C$, la reattanza complessiva X del circuito è negativa; l'angolo di fase φ è negativo e la tensione è in ritardo sulla corrente; il circuito si dice *capacitivo*.
Se infine $X_L = X_C$, la reattanza X è nulla e l'impedenza Z del circuito si identifica con la sua resistenza R; l'angolo di fase φ è zero e la corrente è in fase con la tensione; si verifica in questo caso il fenomeno detto di *risonanza*.

È stato messo precedentemente in evidenza che l'operatore d'impedenza $\bar{Z}$ è quel numero complesso che, moltiplicato per il simbolo complesso della corrente, dà per risultato. il simbolo complesso della tensione. La considerazione dell'operatore $\bar{Z}$ è perciò particolarmente utile per quei sistemi nei quali la corrente è uguale in tutti gli elementi e quindi costituisce un riferimento comune, uguale per tutti; *l'operatore d'impedenza trova dunque la sua più naturale applicazione nei circuiti in serie con altri*.
Nei circuiti in derivazione, invece, la corrente è generalmente diversa nei vari rami in parallelo e la grandezza uguale per tutti, alla quale in tal caso è comodo riferirci, è la tensione applicata ai morsetti di derivazione (fig.2b). Ogni corrente viene dedotta, dalla tensione comune, dividendone il simbolo complesso per l'operatore d'impedenza $\bar{Z}$, ossia rnoltiplicanclone il simbolo complesso per l'inverso di $\bar{Z}$:

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{\bar{\bar{Z}}} = \frac{1}{\bar{\bar{Z}}}\dot{V}$$

Il numero complesso costante, inverso dell'operatore d'impedenza $\bar{Z}$, si dice *operatore d'ammettenza* e si indica con $\bar{Y}$, perciò:

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{Z^2} - j\frac{X}{Z^2}$$

In ogni ramo derivato si ha allora:

$$\dot{I} = \bar{Y}\dot{V}$$

l'operatore d'ammettenza trova dunque la sua più naturale applicazione nei circuiti in parallelo con altri.

a) Impedenza
(L'operatore di impedenza ha la sua più naturale applicazione nei circuiti in serie con altri circuiti, perché la grandezza di riferimento comune, uguale per tutti, è la corrente).

b) Ammettenza
(L'operatore d'ammettenza ha la sua più naturale applicazione nei circuiti in parallelo con altri circuiti, perché la grandezza di riferimento comune, uguale per tutti, è la tensione).

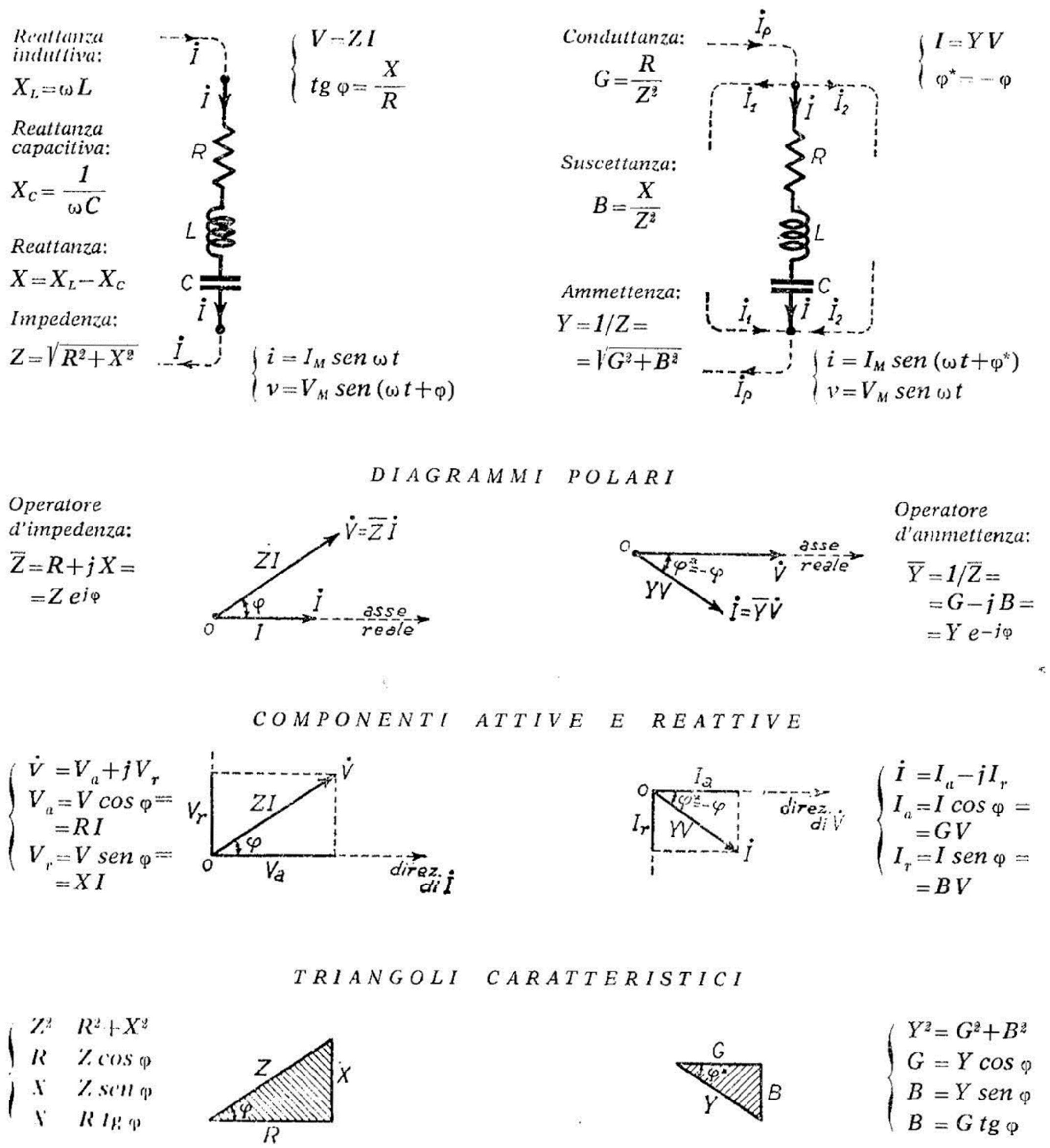


Fig. 2 – Grandezze caratteristiche di un circuito in regime sinusoidale

Il modulo dell'operatore $\bar{Y}$ si chiama comunemente *ammettenza* del circuito e si indica con Y:

$$Y = \sqrt{\frac{R^2}{Z^4} + \frac{X^2}{Z^4}} = \sqrt{\frac{Z^2}{Z^4}} = \frac{1}{Z}$$

l'ammettenza di un circuito ha dunque un valore che è l'inverso del valore dell'impedenza.
La parte reale ed il coefficiente dell'immaginaria dell'operatore d'ammettenza si chiamano rispettivamente *conduttanza* (G) e *suscettanza* (B) del circuito:

$$G = {}^{R}\!/_{Z^2} \qquad\qquad B = {}^{X}\!/_{Z^2}$$

La conduttanza è una grandezza che ha un valore sempre positivo. La suscettanza invece ha un valore positivo per i circuiti induttivi, negativo per i circuiti capacitivi, nullo per i circuiti risonanti.
L'ammettenza, la conduttanza e la suscettanza hanno le dimensioni fisiche dell'inverso di una resistenza e perciò vengono misurate in *Siemens*.
Le espressioni dell'operatore di ammettenza e della ammettenza del circuito possono anche essere scritte nella forma più sintetica:

$$\begin{cases} \bar{Y} = G - jB \\ Y = \sqrt{G^2 + B^2} \end{cases}$$

L'operatore d'ammettenza $\bar{Y}$, nella sua forma esponenziale, è allora:

$$\bar{Y} = Ye^{j\varphi^*}$$

dove φ^* è l'*angolo caratteristico dell'ammettenza*, che risulta:

$$\varphi^* = \tan^{-1}\frac{-B}{G} = \tan^{-1}\frac{-\frac{X}{Z^2}}{\frac{R}{Z^2}} = \tan^{-1}\frac{-X}{R} = -\varphi$$

Vale a dire, *l'angolo caratteristico dell'ammettenza è l'opposto dell'angolo caratteristico dell'impedenza*.
Infatti, l'equazione dell'equilibrio del circuito:

$$\dot{I} = \bar{Y}\dot{V} = Y\dot{V}e^{j\varphi^*}$$

indica che il vettore della corrente si ricava dal vettore della tensione, moltiplicandone la lunghezza per Y e ruotandolo, in grandezza e senso, dell'angolo φ^*. È ovvio perciò che tale angolo debba essere l'opposto dell'angolo φ di cui è necessario ruotare $\dot{I}$ per sovrapporlo alla direzione di $\dot{V}$ (fig. 2b).
In definitiva, la forma esponenziale dell'operatore d'ammettenza può scriversi:

$$\bar{Y} = Ye^{j\varphi}$$

Dalle relazioni:

$$Y = {}^{1}\!/_{Z} \qquad\qquad G = {}^{R}\!/_{Z^2} \qquad\qquad B = {}^{X}\!/_{Z^2}$$

si deducono le espressioni di Z, R e X in funzione di Y, G e B:

$$Z = {}^{1}\!/_{Y} \qquad\qquad R = {}^{G}\!/_{Y^2} \qquad\qquad X = {}^{B}\!/_{Y^2}$$

e pertanto si ha:

$$\begin{cases} I = \dfrac{V}{Z} = YV \\ \tan\varphi = \dfrac{X}{R} = \dfrac{B}{G} \\ \sin\varphi = \dfrac{X}{Z} = \dfrac{B}{Y} \\ \cos\varphi = \dfrac{R}{Z} = \dfrac{G}{Y} \end{cases}$$

Nella pratica del calcolo dei circuiti in regime sinusoidale è spesso utile la considerazione delle componenti del vettore rappresentativo della corrente (della tensione) nella direzione del vettore rappresentativo della tensione (della corrente) ed in quella ad essa perpendicolare (fig. 2).

Le componenti di $\dot{I}4$ rispettivamente in fase ed in quadratura rispetto a $\dot{V}$, si chiamano *componente attiva* (I_a) e *componente reattiva* (I_r) della corrente rispetto alla tensione:

$$\begin{cases} I_a = I\cos\varphi = I\dfrac{G}{Y} = GV \\ I_r = I\sin\varphi = I\dfrac{B}{Y} = BV \end{cases}$$

ossia, le componenti attiva e reattiva della corrente si ottengono moltiplicando il valore efficace della tensione rispettivamente per la conduttanza e la suscettanza del circuito.

Nei circuiti *passivi* (cioè che non comprendono generatori), la componente attiva I_a·è sempre positiva; la componente reattiva I_r, è positiva per i circuiti induttivi $(\varphi > O)$, negativa per i circuiti capacitivi $(\varphi < O)$, nulla per i circuiti risonanti $(\varphi = O)$.

Analogamente, le componenti di $\dot{V}$ rispettivamente in fase ed in quadratura rispetto ad $\dot{I}$, si chiamano *componente attiva* (V_a) e *componente reattiva* (V_r) della tensione rispetto alla corrente:

$$\begin{cases} V_a = V\cos\varphi = V\dfrac{G}{Z} = RI \\ V_r = V\sin\varphi = V\dfrac{X}{Z} = XI \end{cases}$$

vale a dire, la componente attiva e reattiva della tensione si ottengono moltiplicando il valore efficace della corrente rispettivamente per la resistenza e la reattanza del circuito.

Anche per la tensione, nei circuiti passivi, la componente attiva V_a è sempre positiva; la componente reattiva V_r, è positiva per i circuiti induttivi $(\varphi > O)$, negativa per i circuiti capacitivi $(\varphi < O)$, nulla per i circuiti risonanti $(\varphi = O)$.

Le relazioni esistenti fra le grandezze caratteristiche di un circuito in regime sinusoidale, possono sintetizzarsi, per comodità mnemonica, considerando i due triangoli rettangoli costituiti rispettivamente dalla tensione con le sue componenti. attiva e reattiva e dalla corrente con le sue componenti attiva e reattiva (fig. 2).

Ponendo $I = 1$ nel primo caso e $V = 1$ nel secondo, i lati del primo triangolo risultano rispettivamente uguali all'impedenza, alla resistenza ed alla reattanza del circuito, i lati del secondo risultano rispettivamente uguali all'ammettenza, alla conduttanza ed alla suscettanza del circuito.

Pertanto, *l'impedenza di un circuito può essere rappresentata dall'ipotenusa di un triangolo rettangolo (triangolo dell'impedenza) che ha per cateti la resistenza e la reattanza, nel quale l'angolo acuto adiacente al cateto che rappresenta la resistenza, è uguale all'angolo di fase φ della tensione rispetto alla corrente*.

Analogamente, *l'ammettenza di un circuito può essere rappresentata dall'ipotenusa di un triangolo rettangolo (triangolo dell'ammettenza) che ha per cateti la conduttanza e la suscettanza, nel quale l'angolo acuto adiacente al cateto che rappresenta la conduttanza, è uguale all'angolo di fase φ^* della corrente rispetto alla tensione*.

Circuiti elementari

In ogni circuito reale esiste sempre una resistenza, un'induttanza ed una capacità; si possono avere circuiti nei quali una di esse ha un effetto largamente prevalente rispetto alle altre due, ma teoricamente anche quest'ultime, sia pure in piccola misura, sono sempre presenti.

Tuttavia, per effettuare una prima applicazione delle considerazioni svolte, studieremo adesso il comportamento di circuiti ideali astratti (che possiamo immaginare come casi limite rispetto ai circuiti reali) costituiti unicamente da una pura resistenza ohmica, o da una pura induttanza, oppure da una pura capacità (*circuiti elementari*).

L'operatore d'impedenza $\bar{Z}_R$ in un circuito comprendente una resistenza ohmica pura si identifica con la resistenza R ed è perciò un numero reale:

$$\bar{Z}_R = R$$

Pertanto si ha:

$$\begin{cases} Z_R = R \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

Quindi, se al circuito è applicata la tensione:

$$v = V_M \sin \omega t$$

esso è percorso, a regime, dalla corrente:

$$i = \frac{V_M}{R} \sin \omega t$$

ossia, *in un circuito puramente ohmico la corrente a regime è in fase con la tensione ed ha un valore efficace uguale al rapporto fra il valore efficace delia tensione e la resistenza del circuito* (fig. 3):

$$I = \frac{V}{R}$$

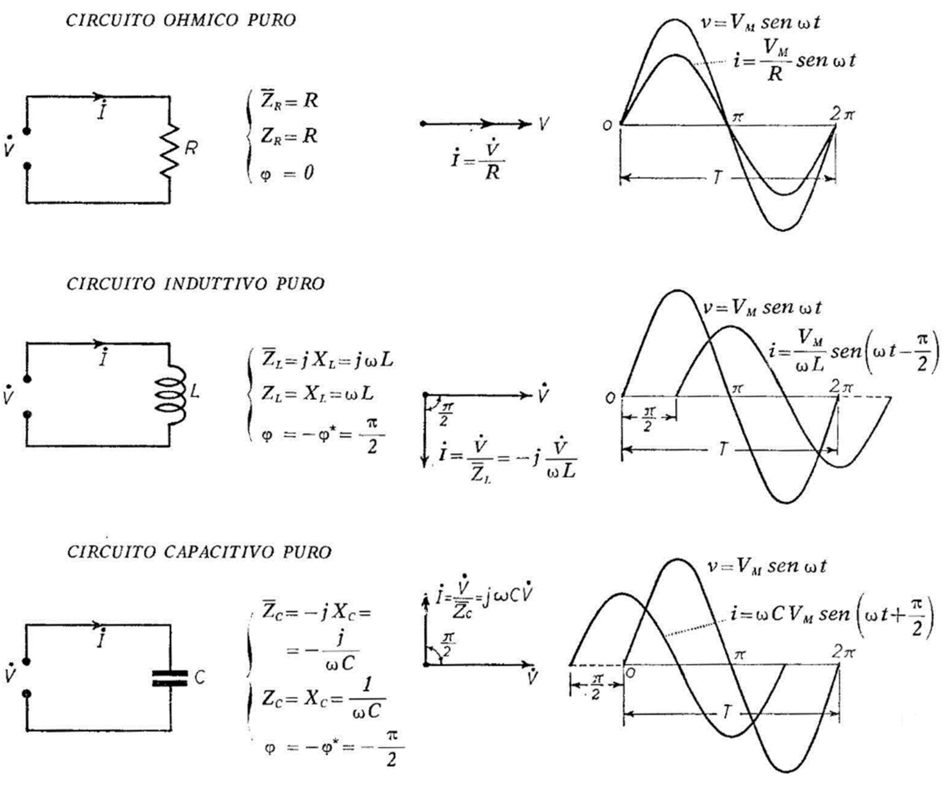


Fig. 3 – Circuiti elementari

L'operatore d'impedenza $\bar{Z}_L$ di un circuito costituito da un'induttanza pura, è un simbolo complesso che possiede solo la parte immaginaria:

$$\bar{Z}_L = jX_L = j\omega L$$

Si ha pertanto:

$$\begin{cases} Z_L = X_L = \omega L \\ \varphi = -\varphi^* = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Perciò se $v = V_M \sin \omega t$ è la tensione applicata al circuito, questo è percorso, a regime, dalla corrente:

$$i = I_M \sin(\omega t + \varphi^*) = \frac{V_M}{\omega L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Vale a dire, *in un circuito puramente induttivo la corrente a regime è in quadratura in ritardo rispetto alla tensione ed ha un valore efficace uguale al rapporto fra il valore efficace delia tensione e la reattanza induttiva del circuito* (fig. 3):

$$I = \frac{V}{X_L} = \frac{V}{\omega L}$$

Anche l'operatore d'impedenza $\bar{Z}_C$ di una capacità pura è un simbolo complesso comprendente la sola parte immaginaria:

$$\bar{Z}_C = -jX_C = -\frac{j}{\omega C}$$

Si ha allora:

$$\begin{cases} Z_C = X_C = \dfrac{1}{\omega C} \\ \varphi = -\varphi^* = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Pertanto, la corrente a regime del circuito varia nel tempo secondo la legge:

$$i = I_M \sin(\omega t + \varphi^*) = \omega C V_M \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Cioè, in un circuito puramente capacitivo la corrente a regime è in quadratura in anticipo rispetto alla tensione ed ha un valore efficace uguale al rapporto fra il valore efficace delia tensione e la reattanza capacitiva del circuito (fig. 3):

$$I = \frac{V}{X_C} = \omega C V$$

Riassumendo:

Vettore tensione	***Operatore d'impedenza***	***Vettore corrente***	***Corrente istantanea***
$\dot{V} = Ve^{j\omega t}$	$\bar{Z}_R = Re^{j0}$	$\dot{I} = \dfrac{\dot{V}}{\bar{Z}_R} = \dfrac{Ve^{j\omega t}}{Re^{j0}} = \dfrac{V}{R} e^{j\omega t}$	$i = \sqrt{2}\dfrac{V}{R}\sin \omega t$
$\dot{V} = Ve^{j\omega t}$	$\bar{Z}_L = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}}$	$\dot{I} = \dfrac{\dot{V}}{\bar{Z}_L} = \dfrac{Ve^{j\omega t}}{\omega L e^{j\frac{\pi}{2}}} = \dfrac{V}{\omega L} e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$	$i = \sqrt{2}\dfrac{V}{\omega L}\sin\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right)$
$\dot{V} = Ve^{j\omega t}$	$\bar{Z}_C = -j\dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$\dot{I} = \dfrac{\dot{V}}{\bar{Z}_C} = \dfrac{Ve^{j\omega t}}{\dfrac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}} = \omega C V e^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}$	$i = \sqrt{2}\omega C V \sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right)$

Le cadute di tensione in regime sinusoidale

In ogni parte di un circuito reale percorso da corrente si manifestano sempre contemporaneamente, in varia misura, fenomeni di dissipazione di energia in calore, di autoinduzione e di accumulazione di cariche elettriche[3]. Quindi, a rigore, in ogni elemento del circuito sono sempre presenti, insieme, una resistenza, una induttanza ed una capacità; vale a dire, *i tre parametri R, L e C sono variamente distribuiti su tutta l'estensione fisica del circuito (Circuiti a costanti distribuite).*
Naturalmente, come è intuitivo, in alcune parti del circuito prevale uno dei parametri, in altre parti ne prevalgono altri. Nei circuiti che si usano nella tecnica, assai spesso ognuno dei tre parametri è praticamente concentrato in una determinata parte del circuito stesso.
I circuiti nei quali *la resistenza, l'induttanza e la capacità possono considerarsi concentrate, ciascuna in un determinato tratto del circuito*, si dicono *circuiti a costanti concentrate*.
Tutte le considerazioni esposte nei paragrafi precedenti, essendo derivate dall'equazione dell'equilibrio, sono ugualmente valide tanto per i circuiti a costanti distribuite, che per i circuiti a costanti concentrate.

Diciamo *caduta di tensione* in un elemento di circuito di impedenza $\bar{Z}$, la tensione $\dot{V}_Z$ esistente ai suoi estremi. Applicando l'equazione dell'equilibrio all'elemento considerato, si ha:

$$\dot{V}_Z = \bar{Z}\dot{I}$$

Consideriamo adesso un circuito a costanti concentrate, compost di una induttanza L, di una resistenza R e di una capacità C, in serie fra loro, alimentato da una tensione sinusoidale $\dot{V}$ (fig. 4).
Le cadute di tensione $\dot{V}_L$, $\dot{V}_R$ e $\dot{V}_C$ agli estremi di R, L e C, quando il circuito è percorso dalla corrente $\dot{I}$, sono date, a regime, dalle espressioni:

$$\begin{cases} \dot{V}_R = R\dot{I} \\ \dot{V}_L = jX_L\dot{I} = j\omega L\dot{I} \\ \dot{V}_C = -jX_C\dot{I} = -j\dfrac{\dot{I}}{\omega C} \end{cases}$$

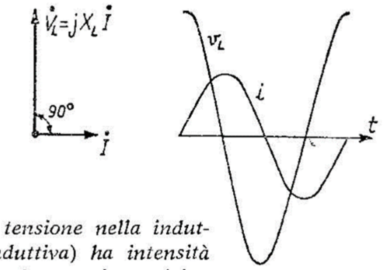
Per la determinazione delle cadute di tensione nei singoli elementi di un circuito, si parte dalla considerazione che, *in istante, tutti gli elementi del circuito sono percorsi dalla stessa corrente*. Pertanto, poiché le tensioni parziali che si localizzano, a regime, agli estremi della resistenza, della induttanza e della capacità, hanno un diverso rapporto di fase con la corrente comune ed uguale per tutti, *le cadute di tensione nei diversi elementi del circuito non sono in fase tra loro*.
I vettori rappresentativi delle cadute di tensione V_R, V_L e V_C hanno quindi nel diagramma polare (fig. 4) direzioni diverse l'una dall'altra e debbono essere composti geometricamente, per ottenere il vettore rappresentativo della tensione applicata al circuito:

$$\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_L + \dot{V}_C$$

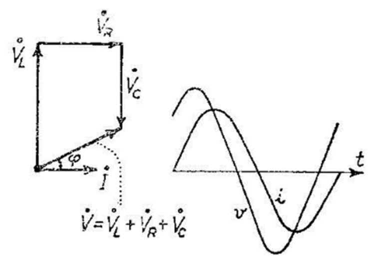
Pertanto, le cadute di tensione che si verificano nella resistenza R, nell'induttanza L e nella capacità C, di un circuito a costanti concentrati, in regime sinusoidale, percorso da una corrente I, hanno intensità $V_R = RI$, $V_L = X_LI = \omega LI$, $V_C = X_CI = {}^{I}/_{\omega C}$ e per quanto riguarda la loro fase:

- *la caduta ohmica RI è in fase con la corrente;*
- *la caduta induttiva X_LI è in quadratura in anticipo rispetto alla corrente;*
- *la caduta capacitiva X_CI è in quadratura in ritardo rispetto alla corrente.*

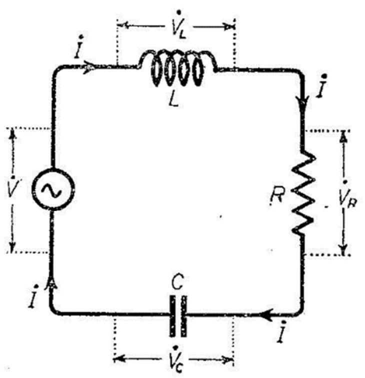
[3] Anche nei circuiti dove non compaiono inseriti dei condensatori, esiste sempre, fra due punti A e B qualsiasi, una differenza di potenziale; pertanto in teoria, si stabilisce tra di essi, attraverso il dielettrico circostante al circuito, un accoppiamento capacitivo in derivazione al circuito stesso. Inoltre le considerazioni che qui si svolgono si riferiscono ovviamente a circuiti cosiddetti passivi, nei quali non si verifica alcun'altra trasformazione di energia oltre quella di carattere termico

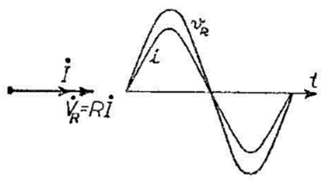


La caduta di tensione nella induttanza (caduta induttiva) ha intensità $X_L I$ ed è in quadratura in anticipo sulla corrente.

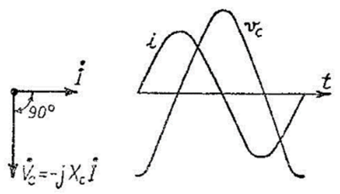


La tensione $\dot{V}$ applicata al circuito è la risultante della composizione geometrica delle singole cadute di tensione.





La caduta di tensione nella resistenza (caduta ohmica) ha intensità RI ed è in fase con la corrente.



La caduta di tensione nella capacità (caduta capacitiva) ha intensità $X_C I$ ed è in quadratura in ritardo sulla corrente.

Fig. 4 – Cadute di tensione negli elementi di un circuito a costanti concentrate

Sommario